Les fonctions usuelles

Objectif :

Connaître les représentations graphiques de ces fonctions et leurs propriétés principales

Les fonctions usuelles vues en terminale

- Logarithme et exponentielle

  $f(x)=\ln(x)$ $g(x)=\log(x)$ $h(x)=\exp(x)=e^x$

- Puissances et polynômes

  $f(x)=x^2$ $g(x)=x^{2/3}$ $h(x)=x^{\sqrt{2}}$ $k(x)=x^{-2}$

  $l(x)=-x^3+2x-3$

- Trigonométriques

  $f(x)=\cos(x)$ $g(x)=\sin(x)$ $h(x)=\tan(x)$

D’autres fonctions usuelles

a) Réciproques des fonctions trigonométriques

f(x)=arcsin(x) g(x)=arccos(x) h(x)=arctan(x)

a) Fonctions hyperboliques

f(x)=sinh(x) g(x)=cosh(x) h(x)=tanh(x)

Logarithmes et exponentielle

- Logarithme népérien
- Autres logarithmes
- exponentielle

Logarithme népérien

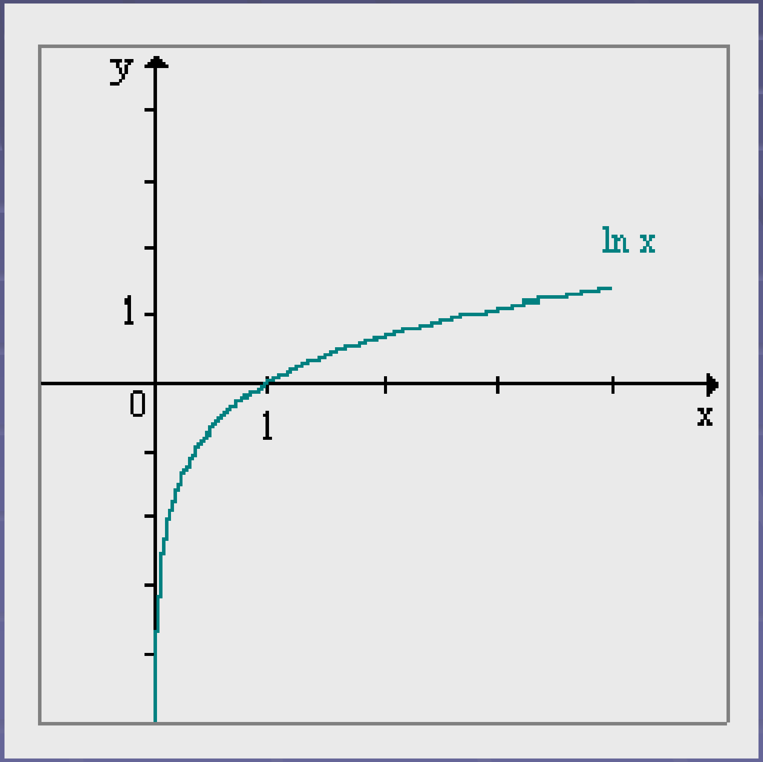
Définition : la fonction logarithme népérien notée ln définie sur $]0;+\infty[$

est la fonction telle que

sa dérivée est $1/x$

$\ln(1)=0$

Propriétés :
$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$
$\ln(a/b)=\ln(a)-\ln(b)$
$\ln(a^{\alpha})=\alpha \ln(a)$



Autres Logarithmes

- Logarithme décimal

$\log(x)=\ln(x)/\ln(10)$

$\log(10)=1$

- Logarithme de base $a>0$ et $a\neq1$

$\log_a(x)=\ln(x)/\ln(a)$

$\log_a(a)=1$

Exponentielle

Définition : La fonction réciproque de ln est la fonction exponentielle

$$\left.\begin{array}{l} y = e^{x} \\ x \in \Re \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ln(y) \\ y \in \left]0;+\infty\right[\end{array}\right.$$

Propriétés :

$\exp'(x) = \exp(x)$

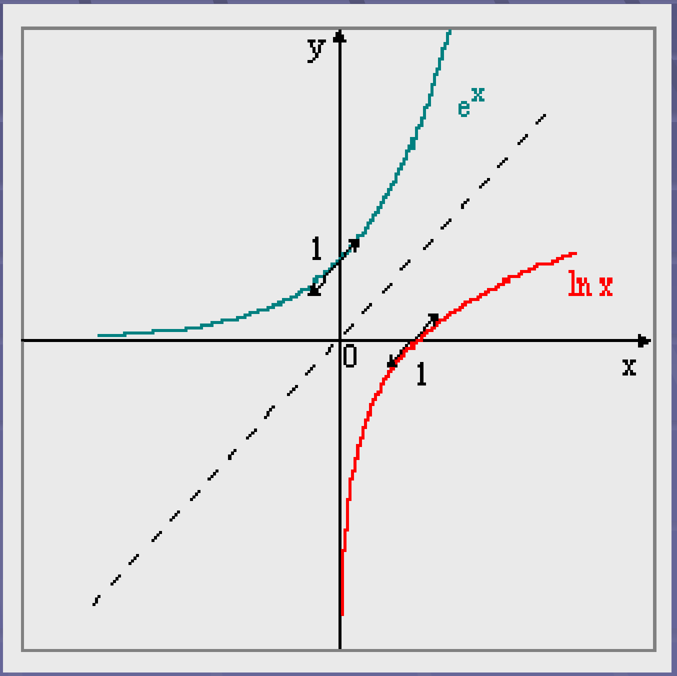
$e^{0} = 1$

$e^{1} = 2{,}718\ldots$

$e^{a+b} = e^{a}\, e^{b}$

$e^{-a} = 1/e^{a}$

$e^{ra} = (e^{a})^{r}$



Puissances et polynômes

- Fonctions puissances :

Carré, cube,…

Généralisation

- Fonctions polynômes

Les fonctions puissances

Cas particuliers :

- Si n est un entier positif x^n
- Si k est un entier relatif x^k
- Si r est un rationnel x^r

Cas général

Si a est un réel, x^a

Carré

- Définition : la fonction carré est définie pour tout x réel par

$$x^2=x.x$$

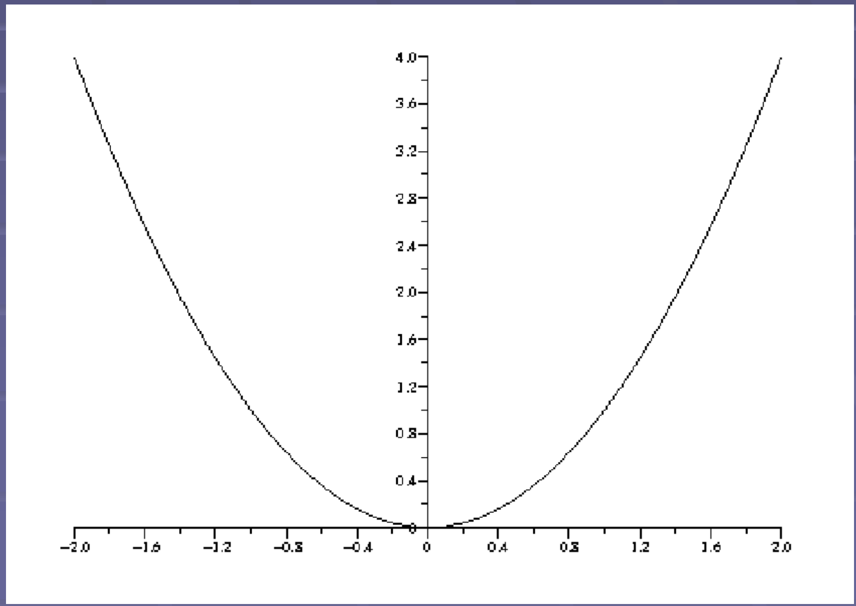
Propriétés :

Paire

Non bijective sur R

Réciproque sur $[0,+\infty[$ notée $\sqrt{}$

Dérivée: 2x

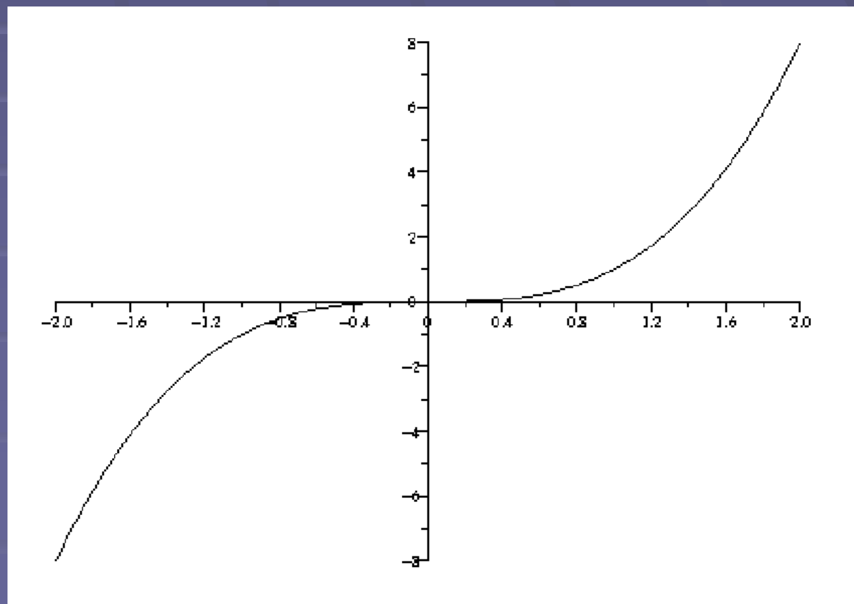


Cube

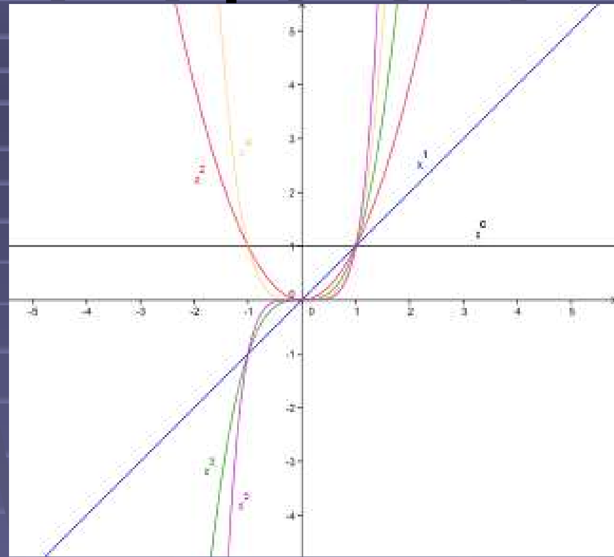
- Définition : la fonction cube est définie pour tout x réel par

$$x^3 = x.x.x$$

Propriétés :
Impaire
Bijective
La réciproque est racine cubique
Dérivée: $3x^2$



Fonction x^n avec n entier positif



- Définition : pour tout x réel

  $x^n=x \ldots . x$ (n fois)

Propriétés :

Si n est pair (impair), la fonction est paire (impaire)

Réciproque sur [0,+∞[: fonction racine nième

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt[n]{x} \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y^{n} \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

Dérivée: nx^{n-1}

Fonction x^{-n} avec n entier positif

- Si n entier positif , $x^{-n} = 1/x^n$

Exemple : $x^{-2}=1/x^2=1/(x.x)$

- pour $x \geq 0$, $x^{1/n}={}^n\sqrt{x}$ (racine nième)

Exemple : $x^{1/2}=\sqrt{x}$

- Si $r=p/q$, alors $x^r={}^q\sqrt{x^p}$

Exemples : pour $x>0$, $x^{-1/2}=1/\sqrt{x}$

pour $x \geq 0$, $x^{5/2}=\sqrt{x^5}$

pour tout x, $x^{2/3}={}^3\sqrt{x^2}$

Dérivée de x^r: rx^{r-1}

Généralisation : x^a avec a réel

- Définition : Soit a un réel

pour $x>0$ $x^a=e^{a\ln(x)}$

Propriétés: Soient a et b deux réels, $x>0$ et $y>0$

$1^a=1$

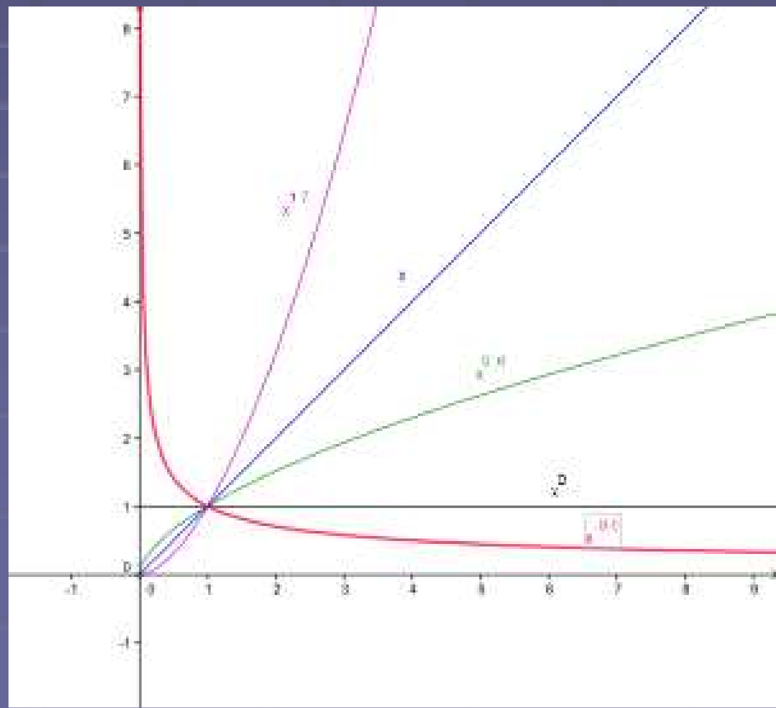
$x^{a+b}=x^a x^b$

$(x^a)^b=x^{ab}$

$x^{-a}=1/x^a$

$(xy)^a=x^a y^a$

Dérivée: ax^{a-1}



Polynômes

Exemple : $p(x)=x^{24}+\sqrt{3}x^4-x/3$ est un polynôme de degré 24.

- Les polynômes sont souvent utilisées parce que ce sont les fonctions les plus simples

$p'(x)=24x^{23}+4\sqrt{3}x^3-1/3$

limite en $+\infty$ de $p(x)$= limite en $+\infty$ de x^{24}

- les polynômes de degré inférieur ou égal à *n* sont des fonctions dont la dérivée (*n*+1)ième est nulle.

$p^{(25)}(x)=0$

- Un aspect important en calcul numérique est la possibilité d'étudier les fonctions compliquées au moyen d'approximations par des polynômes.

Quelques limites classiques

Quand $x \rightarrow +\infty$

$\ln(x)/x \rightarrow 0$

$e^x/x \rightarrow +\infty$

« La fonction exp l'emporte sur puissance qui l'emporte sur logarithme en +∞»

Quand $x \rightarrow 0$

$x \ln(x) \rightarrow 0$

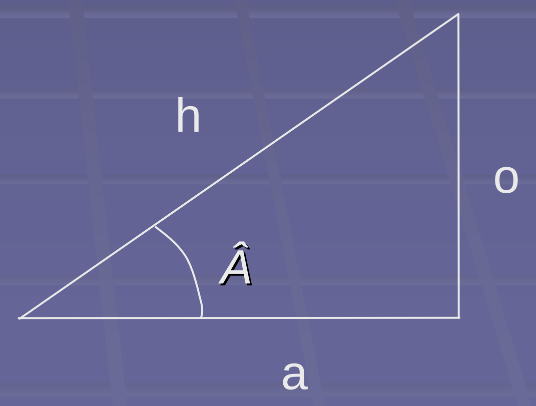
$\ln(x+1)/x \rightarrow 1$

Fonctions trigonométriques

- Sinus
- Cosinus
- tangente

Cosinus, sinus et tangente dans le triangle rectangle

- cos(*Â*) = longueur de côté adjacent / longueur de l'hypoténuse = *a*/*h*.
- sin(*Â*) = longueur du côté opposé / longueur de l'hypoténuse = *o*/*h*.
- tan(*Â*) = longueur du côté opposé / longueur du côté adjacent = *o*/*a*.



Sinus et cosinus : valeurs remarquables

	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non defini

Sinus et cosinus : formules fondamentales

Formules de trigonométrie

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

$\sin(a\pm b)=\sin(a)\cos(b) \pm\sin(b)\cos(a)$

$\cos(a\pm b)=\cos(a)\cos(b)-/+\sin(a)\sin(b)$

Formules d'Euler et de Moivre

$\cos(a)=(e^{ia}+e^{-ia})/2$

$\sin(a)=(e^{ia}-e^{-ia})/(2i)$

$(e^{ix})^b=\cos(bx)+i \sin(bx)$

Sinus

Propriétés : R-> [-1;1]
Période 2π

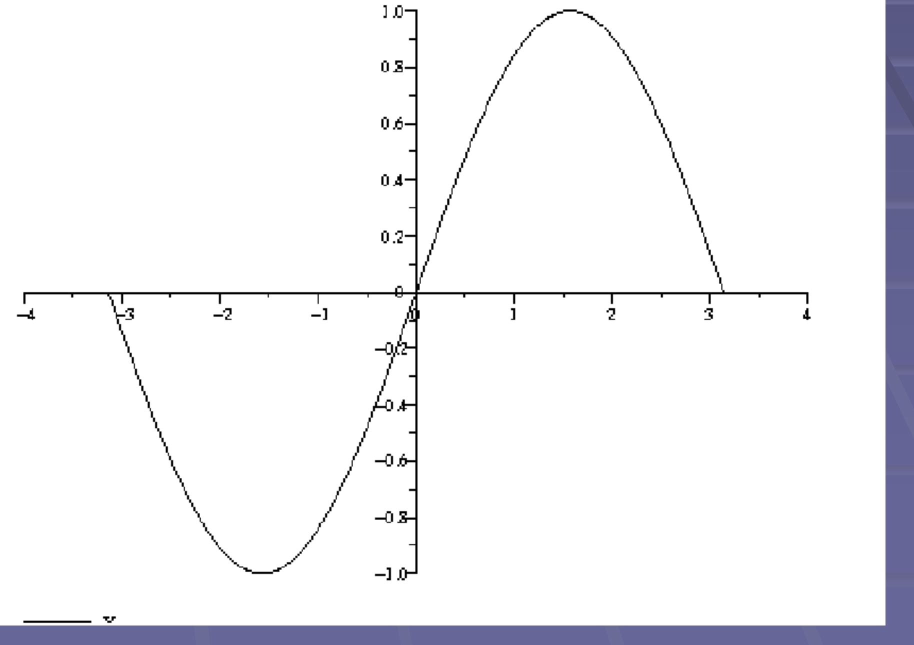
impaire

sin(0)=0

sin'(x)=cos(x)

Limite x → 0
sin(x)/x →1

Pas de limite en ∞



Cosinus

Propriétés : R->[-1;1]

Période 2π

Paire

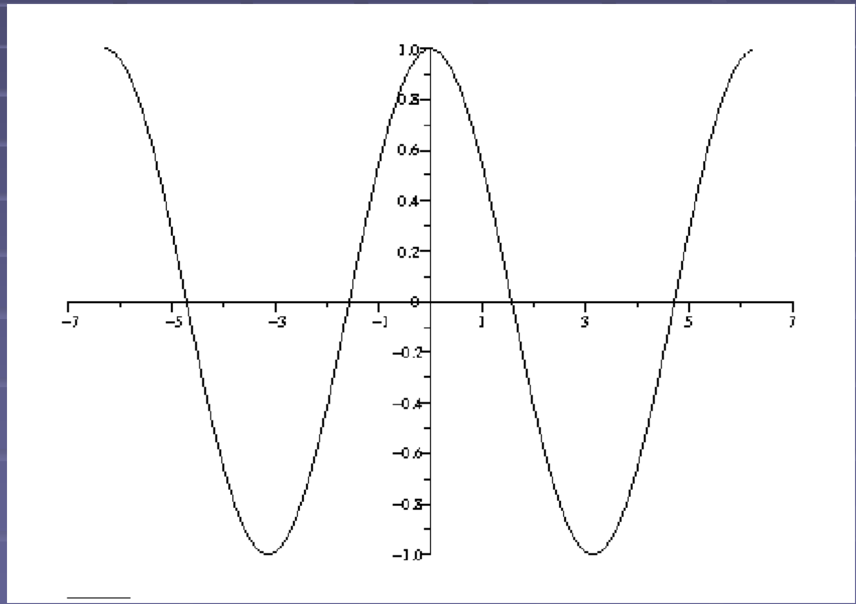
cos(0)=1

cos'(x)=-sin(x)

Limite x → 0

(cos(x)-1)/x →0

Pas de limite en l'infini



Tangente

Définition : pour tout x réel tel que $\cos(x) \neq 0$

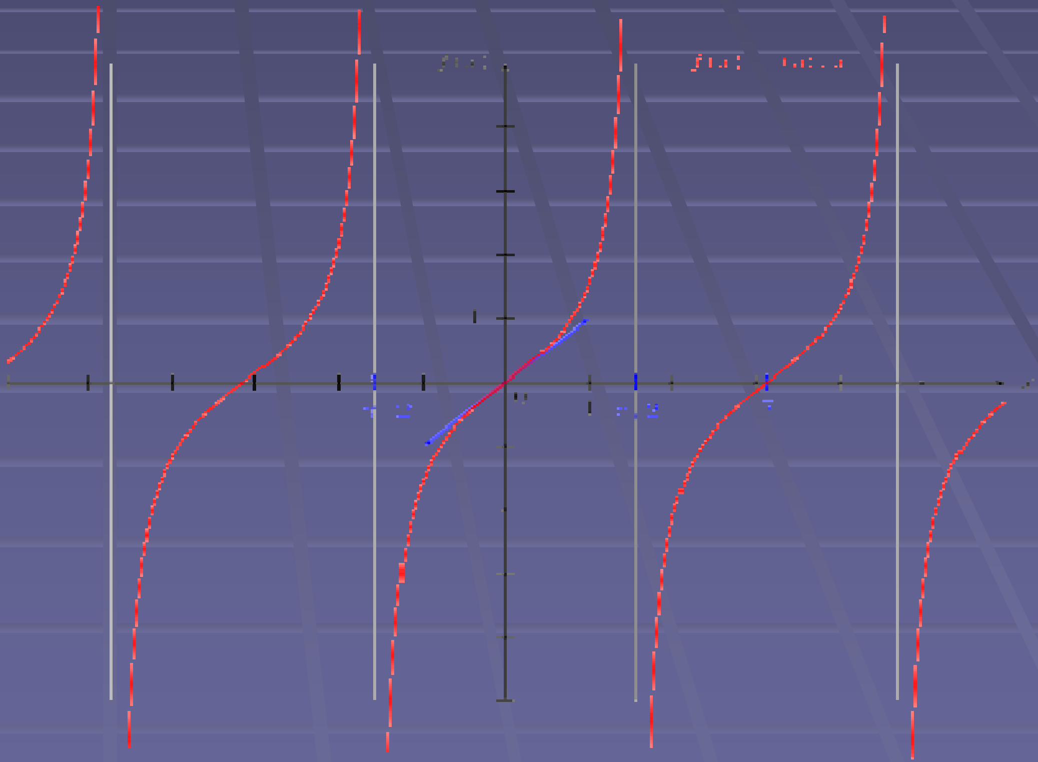
$\tan(x)=\sin(x)/\cos(x)$

Propriétés :

Période π

impaire

$\tan'(x)=1+\tan^2(x)=1/\cos^2(x)$



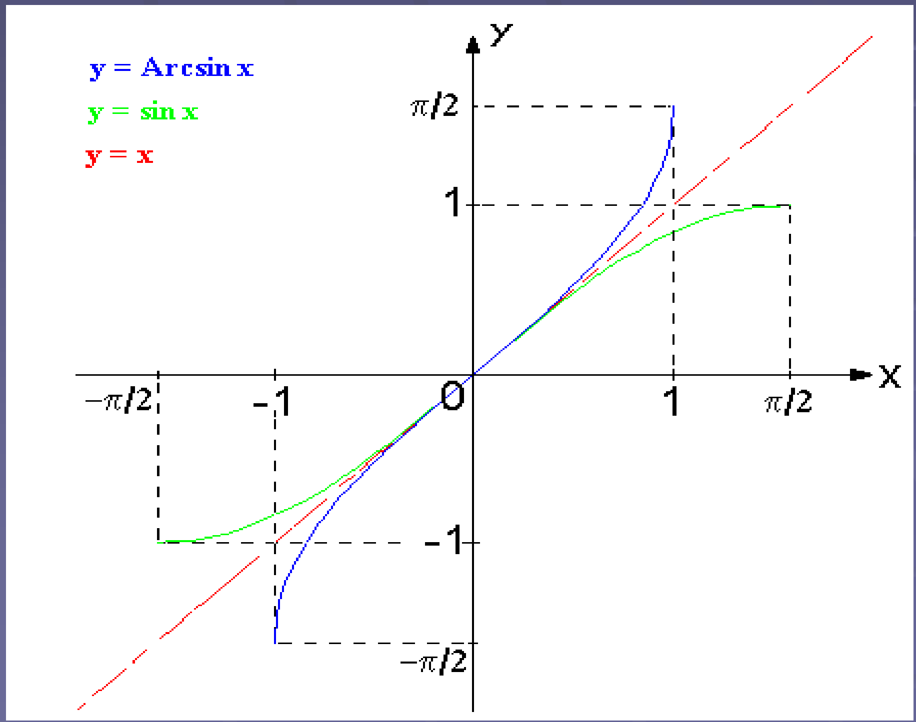
Reciproques des fonctions trigonométriques

- Arcsinus
- Arccosinus
- Arctangente

Arcsinus

- Définition : arcsinus est la réciproque de la restriction de sinus : [-π/2;π/2]→[-1;1]. Elle se note arcsin

$$\left.\begin{array}{c} y=\arcsin(x) \\ x\in[-1;1] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\sin(y) \\ y\in[-\Pi/2;\Pi/2] \end{array}\right.$$

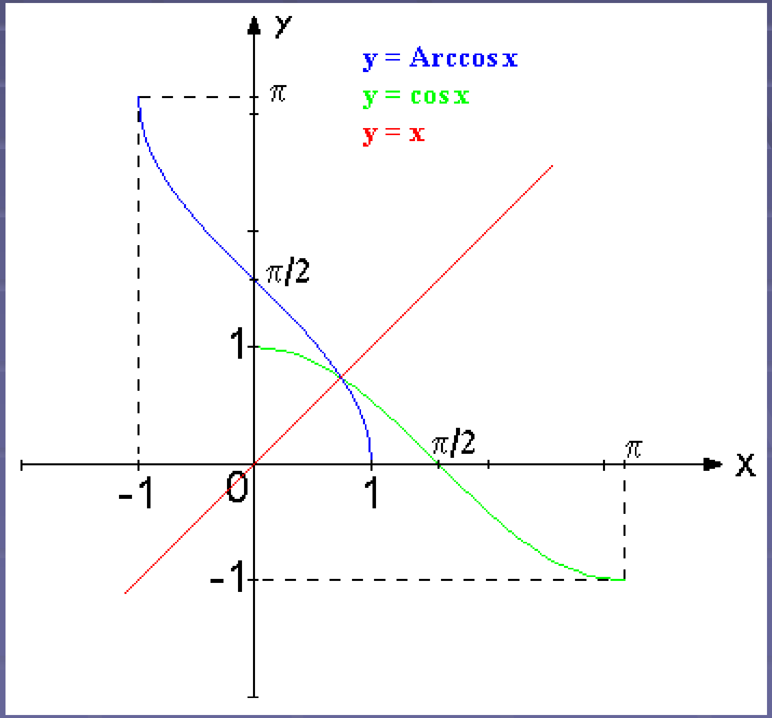


Pour -1<x<1,
Arcsin'(x)=1/√(1-x²)

Arccosinus

- Définition : arccosinus est la réciproque de la restriction de cosinus : [0;π]→[-1;1]. Elle se note arccos

$$\left.\begin{array}{c} y = \arccos(x) \\ x \in [-1;1] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \cos(y) \\ y \in [0;\Pi] \end{array}\right.$$



Pour -1<x<1,

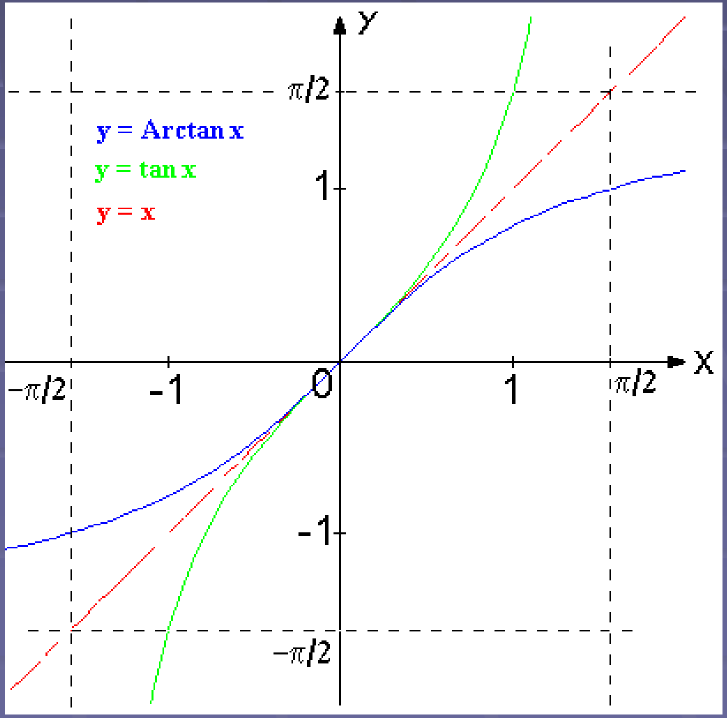
$\text{Arccos}'(x) = -\,1/\sqrt{(1-x^2)}$

Arctangente

- Arctangente est la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle *]-½ π; ½ π[*. Elle se note ***arctan***.

$$\left.\begin{array}{r} y = \arctan(x) \\ x \in R \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \tan(y) \\ y \in]-\Pi/2;\Pi/2[\end{array}\right.$$

Pour tout x réel,
Arctan’(x)=1/(1+x²)



Fonctions hyperboliques

- Sinus hyperbolique
- Cosinus hyperbolique
- Tangente hyperbolique

Sinus hyperbolique

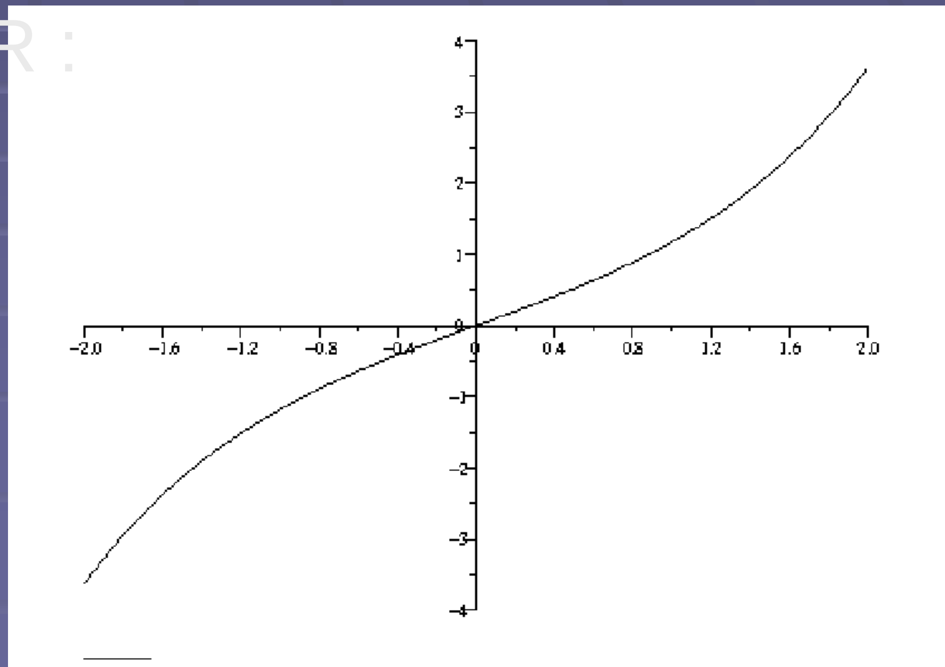
Définition : pour tout x réel

$\sinh(x)=(e^{x}-e^{-x})/2$

impaire, strict croissante

fonction bijective de R->R :

réciproque x->argsh(x)



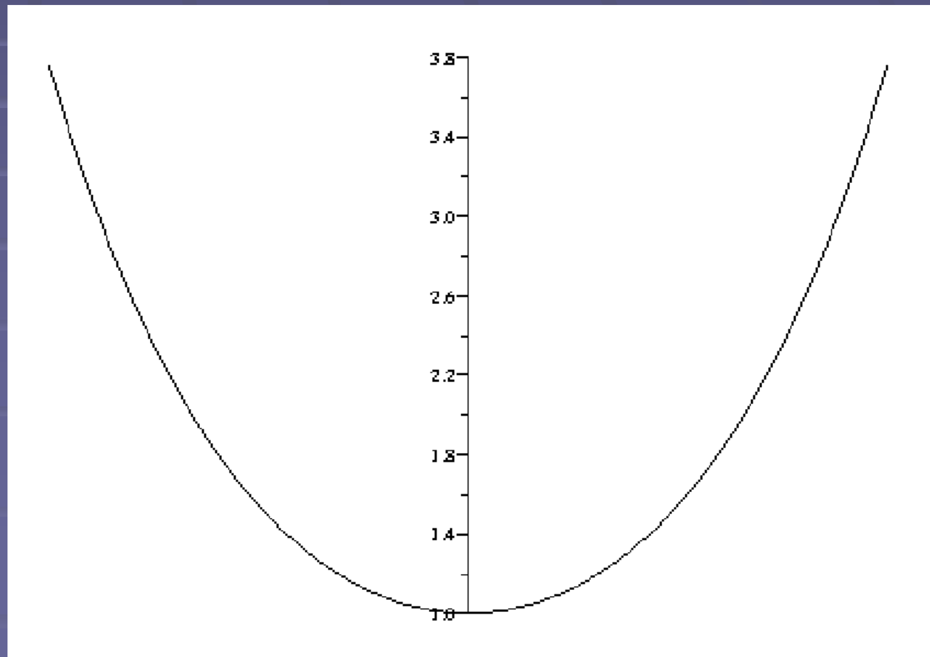
Cosinus hyperbolique

Définition : pour tout x réel
$\cosh(x)=(e^{x}+e^{-x})/2$

Propriétés principales :
$ch^2(x)- sh^2(x)=1$

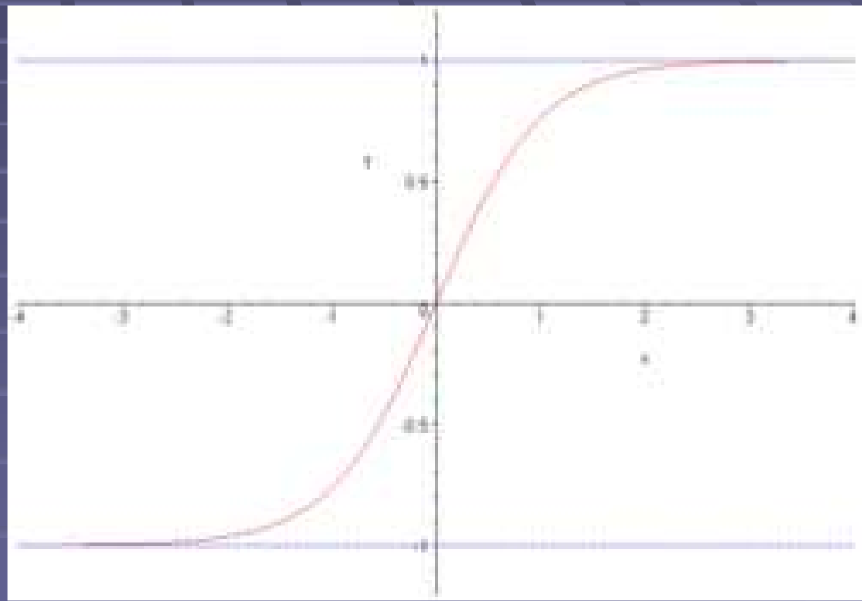
$sh'(x)=ch(x)$
$ch'(x)=sh(x)$

fonction paire, non bijective



Tangente hyperbolique

Définition : pour tout x réel
$\tanh(x)=\sinh(x)/\cosh(x)$



$\tanh'(x)=1/ch^2(x)=1-th^2(x)$