Modélisation par équation différentielle de la croissance d'une population

2ème année

E.N.S.T.B.B.
I.P.B.

Année Universitaire 2013-14

Plan

La modélisation est devenue une étape importante de la recherche en biologie et peut aider dans la démarche expérimentale. Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques modèles mathématiques de croissance de population par équations différentielles. Il existe d'autres types de modélisation: modèles discrets ou stochastiques,...

La modélisation est devenue une étape importante de la recherche en biologie et peut aider dans la démarche expérimentale. Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques modèles mathématiques de croissance de population par équations différentielles. Il existe d'autres types de modélisation: modèles discrets ou stochastiques,...

La modélisation est devenue une étape importante de la recherche en biologie et peut aider dans la démarche expérimentale. Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques modèles mathématiques de croissance de population par équations différentielles. Il existe d'autres types de modélisation: modèles discrets ou stochastiques,...

Ici on modélise l'évolution d'une population à l'aide d'une équation mathématique en faisant l'hypothèse que l'on a une répartition spatiale homogène de la population: on utilisera donc une équation différentielle pour cette modélisation (si la répartition n'est pas homogène, on peut utiliser une équation aux dérivées partielles). Dans le prochain chapitre, nous nous intéresserons à une modélisation plus complexe de plusieurs populations par un système d'équations différentielles. **"Les modèles ne sont que des mensonges qui nous permettent d'appréhender la réalité"**

Ici on modélise l'évolution d'une population à l'aide d'une équation mathématique en faisant l'hypothèse que l'on a une répartition spatiale homogène de la population: on utilisera donc une équation différentielle pour cette modélisation (si la répartition n'est pas homogène, on peut utiliser une équation aux dérivées partielles). Dans le prochain chapitre, nous nous intéresserons à une modélisation plus complexe de plusieurs populations par un système d'équations différentielles. "Les modèles ne sont que des mensonges qui nous permettent d'appréhender la réalité"

Ici on modélise l'évolution d'une population à l'aide d'une équation mathématique en faisant l'hypothèse que l'on a une répartition spatiale homogène de la population: on utilisera donc une équation différentielle pour cette modélisation (si la répartition n'est pas homogène, on peut utiliser une équation aux dérivées partielles). Dans le prochain chapitre, nous nous intéresserons à une modélisation plus complexe de plusieurs populations par un système d'équations différentielles. "Les modèles ne sont que des mensonges qui nous permettent d'appréhender la réalité"

Ici on modélise l'évolution d'une population à l'aide d'une équation mathématique en faisant l'hypothèse que l'on a une répartition spatiale homogène de la population: on utilisera donc une équation différentielle pour cette modélisation (si la répartition n'est pas homogène, on peut utiliser une équation aux dérivées partielles). Dans le prochain chapitre, nous nous intéresserons à une modélisation plus complexe de plusieurs populations par un système d'équations différentielles. **"Les modèles ne sont que des mensonges qui nous permettent d'appréhender la réalité"**

Ici on modélise l'évolution d'une population à l'aide d'une équation mathématique en faisant l'hypothèse que l'on a une répartition spatiale homogène de la population: on utilisera donc une équation différentielle pour cette modélisation (si la répartition n'est pas homogène, on peut utiliser une équation aux dérivées partielles). Dans le prochain chapitre, nous nous intéresserons à une modélisation plus complexe de plusieurs populations par un système d'équations différentielles. **"Les modèles ne sont que des mensonges qui nous permettent d'appréhender la réalité"**

Objectif

Savoir étudier une équation différentielle modélisant la croissance d'une population et interpréter les résultats obtenus.

On va s'intéresser à l'évolution en fonction du temps d'une variable $y(t)$ (taille d'une cellule, sa masse, une concentration, ...). Par des considérations théoriques, on va décrire l'évolution de $y(t)$ à l'aide d'une équation différentielle (équation liant y et sa dérivée y'). Malheureusement, bien souvent on ne sait pas résoudre explicitement les modéles (les ED) obtenus. Aussi dans ce chapitre, nous allons apprendre à les étudier de façon géométrique afin d'obtenir un maximum de renseignements et en particulier l'allure du graphe de y.

Objectif

Savoir étudier une équation différentielle modélisant la croissance d'une population et interpréter les résultats obtenus. On va s'intéresser à l'évolution en fonction du temps d'une variable $y(t)$ (taille d'une cellule, sa masse, une concentration, ...). Par des considérations théoriques, on va décrire l'évolution de $y(t)$ à l'aide d'une équation différentielle (équation liant y et sa dérivée y'). Malheureusement, bien souvent on ne sait pas résoudre explicitement les modéles (les ED) obtenus. Aussi dans ce chapitre, nous allons apprendre à les étudier de façon géométrique afin d'obtenir un maximum de renseignements et en particulier l'allure du graphe de y.

Objectif

Savoir étudier une équation différentielle modélisant la croissance d'une population et interpréter les résultats obtenus. On va s'intéresser à l'évolution en fonction du temps d'une variable $y(t)$ (taille d'une cellule, sa masse, une concentration, ...). Par des considérations théoriques, on va décrire l'évolution de $y(t)$ à l'aide d'une équation différentielle (équation liant y et sa dérivée y'). Malheureusement, bien souvent on ne sait pas résoudre explicitement les modéles (les ED) obtenus. Aussi dans ce chapitre, nous allons apprendre à les étudier de façon géométrique afin d'obtenir un maximum de renseignements et en particulier l'allure du graphe de y.

IPB ENSTBB BORDEAUX

Objectif

Savoir étudier une équation différentielle modélisant la croissance d'une population et interpréter les résultats obtenus. On va s'intéresser à l'évolution en fonction du temps d'une variable $y(t)$ (taille d'une cellule, sa masse, une concentration, ...). Par des considérations théoriques, on va décrire l'évolution de $y(t)$ à l'aide d'une équation différentielle (équation liant y et sa dérivée y'). Malheureusement, bien souvent on ne sait pas résoudre explicitement les modéles (les ED) obtenus. Aussi dans ce chapitre, nous allons apprendre à les étudier de façon géométrique afin d'obtenir un maximum de renseignements et en particulier l'allure du graphe de y.

Dans un premier temps, nous allons présenter quelques modèles de croissance. Nous rappelons le vocabulaire des ED. Puis, nous donnons des résultats mathématiques sur les ED qui nous permettront d'étudier les modèles présentés au début.

Plan

Plan

Plan

IPB
ENSTBB
BORDEAUX

Un des premiers modèles de croissance de population est du à Fibonnacci (mathématicien 1175-1250) et s'applique à la croissance d'une population de lapins

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

C'est un modèle discret (non continu et ce n'est donc pas une modélisation par ED).

IPB
ENSTBB
BORDEAUX

Ensuite, un premier modèle par ED est du à Malthus (1798) et concerne la croissance de la population humaine.

Le modèle:

si $y(t)$ est la concentration ou la densité de la population à l'instant t, et a leur taux de croissance, on peut supposer que la variation de $y(t)$ pendant un intervalle de temps δt s'écrit :

$$y(t + \delta t) = y(t) + \mu \delta t y(t),$$

$\mu \delta t$ est une sorte de probabilité de reproduction par individu pendant le temps δt.

Ensuite, un premier modèle par ED est du à Malthus (1798) et concerne la croissance de la population humaine.

Le modèle:

si $y(t)$ est la concentration ou la densité de la population à l'instant t, et a leur taux de croissance, on peut supposer que la variation de $y(t)$ pendant un intervalle de temps δt s'écrit :

$$y(t+\delta t) = y(t) + \mu \delta t y(t),$$

$\mu \delta t$ est une sorte de probabilité de reproduction par individu pendant le temps δt.

Ensuite, un premier modèle par ED est du à Malthus (1798) et concerne la croissance de la population humaine.
Le modèle:
si $y(t)$ est la concentration ou la densité de la population à l'instant t, et a leur taux de croissance, on peut supposer que la variation de $y(t)$ pendant un intervalle de temps δt s'écrit :

$$y(t+\delta t) = y(t) + \mu \delta t y(t),$$

$\mu \delta t$ est une sorte de probabilité de reproduction par individu pendant le temps δt.

$$\frac{y(t+\delta t) - y(t)}{\delta t} = \mu y(t),$$

En considérant que l'intervalle de temps δt est petit, en faisant tendre $\delta t \mapsto 0$, on obtient alors l'équation différentielle

$$y'(t) = \mu y(t).$$

Si on fait l'hypothèse que μ est une constante alors on peut décrire le comportement global de la population, c'est la croissance exponentielle bien connue $y(t) = y_0 e^{\mu t}$ où y_0 est la valeur de y à l'instant $t = 0$ (la condition initiale).
Les conclusions de Malthus font sensation dans le monde scientifique !

$$\frac{y(t+\delta t) - y(t)}{\delta t} = \mu y(t),$$

En considérant que l'intervalle de temps δt est petit, en faisant tendre $\delta t \mapsto 0$, on obtient alors l'équation différentielle

$$y'(t) = \mu y(t).$$

Si on fait l'hypothèse que μ est une constante alors on peut décrire le comportement global de la population, c'est la croissance exponentielle bien connue $y(t) = y_0 e^{\mu t}$ où y_0 est la valeur de y à l'instant $t = 0$ (la condition initiale).
Les conclusions de Malthus font sensation dans le monde scientifique !

$$\frac{y(t+\delta t)-y(t)}{\delta t}=\mu y(t),$$

En considérant que l'intervalle de temps δt est petit, en faisant tendre $\delta t \mapsto 0$, on obtient alors l'équation différentielle

$$y'(t)=\mu y(t).$$

Si on fait l'hypothèse que μ est une constante alors on peut décrire le comportement global de la population, c'est la croissance exponentielle bien connue $y(t)=y_0e^{\mu t}$ où y_0 est la valeur de y à l'instant $t=0$ (la condition initiale).
Les conclusions de Malthus font sensation dans le monde scientifique !

$$\frac{y(t+\delta t)-y(t)}{\delta t}=\mu y(t),$$

En considérant que l'intervalle de temps δt est petit, en faisant tendre $\delta t \mapsto 0$, on obtient alors l'équation différentielle

$$y'(t)=\mu y(t).$$

Si on fait l'hypothèse que μ est une constante alors on peut décrire le comportement global de la population, c'est la croissance exponentielle bien connue $y(t)=y_0 e^{\mu t}$ où y_0 est la valeur de y à l'instant $t=0$ (la condition initiale).

Les conclusions de Malthus font sensation dans le monde scientifique !

$$\frac{y(t+\delta t)-y(t)}{\delta t}=\mu y(t),$$

En considérant que l'intervalle de temps δt est petit, en faisant tendre $\delta t \mapsto 0$, on obtient alors l'équation différentielle

$$y'(t)=\mu y(t).$$

Si on fait l'hypothèse que μ est une constante alors on peut décrire le comportement global de la population, c'est la croissance exponentielle bien connue $y(t)=y_0e^{\mu t}$ où y_0 est la valeur de y à l'instant $t=0$ (la condition initiale).
Les conclusions de Malthus font sensation dans le monde scientifique !

Quelques autres modèles de croissance

il est possible à partir du modèle de Malthus de dériver d'autres modèles en faisant des hypothèses différentes par exemple sur le taux de croissance μ...

- Modèle de Verhulst (croissance logistique)

$$y' = ky(1 - y/y_m)$$

  (où k et y_m sont des constantes).

- Modèle de Monod

$$y' = \frac{ry(1 - y/K)}{C - y}$$

  (où r, K et C sont des constantes)

Nous allons voir dans le cas particulier du chemostat comment on peut arriver à de tels modèles.

Plan

Dans cette modélisation, on s'intéresse au développement contrôlé d'organismes dans le chemostat: on veut étudier l'évolution de la croissance bactérienne. Nous présentons ici un modèle prenant en compte l'évolution des concentrations des bactéries et des nutriments. Les conditions de culture (température, pH,...) sont supposées constantes. Il s'agit a priori d'un **système d'équations différentielles.** Mais sous certaines hypothèses, le système peut se réduire à une seule équation différentielle et une équation algébrique.

On place dans la chambre du chemostat les organismes (appelés biomasse) dont on veut étudier la croissance alimenté par des nutriments (appelés substrat). On note x la concentration de biomasse dans la chambre, s celle du subtrat, V le volume contenu dans la chambre du fermenteur, F_{in} le flux entrant et F_{ex} le flux sortant. On a $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex}$. Ces organismes sont alimentés par l'entrée dans le système de nutriment, à une concentration s_{in}.

On place dans la chambre du chemostat les organismes (appelés biomasse) dont on veut étudier la croissance alimenté par des nutriments (appelés substrat). On note x la concentration de biomasse dans la chambre, s celle du subtrat, V le volume contenu dans la chambre du fermenteur, F_{in} le flux entrant et F_{ex} le flux sortant. On a $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex}$. Ces organismes sont alimentés par l'entrée dans le système de nutriment, à une concentration s_{in}.

On place dans la chambre du chemostat les organismes (appelés biomasse) dont on veut étudier la croissance alimenté par des nutriments (appelés substrat). On note x la concentration de biomasse dans la chambre, s celle du subtrat, V le volume contenu dans la chambre du fermenteur, F_{in} le flux entrant et F_{ex} le flux sortant. On a $\dfrac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex}$. Ces organismes sont alimentés par l'entrée dans le système de nutriment, à une concentration s_{in}.

On place dans la chambre du chemostat les organismes (appelés biomasse) dont on veut étudier la croissance alimenté par des nutriments (appelés substrat). On note x la concentration de biomasse dans la chambre, s celle du subtrat, V le volume contenu dans la chambre du fermenteur, F_{in} le flux entrant et F_{ex} le flux sortant. On a $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex}$. Ces organismes sont alimentés par l'entrée dans le système de nutriment, à une concentration s_{in}.

Définition

On définit

- μ, *le taux de croissance instantané de* x, *par*

$$\mu = \frac{dx}{dt} / x(t)$$

- $Y_{x/s}$, *le rendement instantané, par*

$$Y_{x/s} = \frac{dx}{dt} / \frac{ds}{dt}.$$

On peut faire différentes hypothèses sur ces paramètres (constante, fonction, ...)

Un modèle mathématique classique de croissance des bactéries dans le chemostat est le suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d(xV)}{dt} & = & \mu xV - F_{ex}x \\ \dfrac{d(sV)}{dt} & = & F_{in}s_{in} - F_{ex}s - \dfrac{\mu}{Y_{x/s}}xV \end{array}\right.$$

Un modèle mathématique classique de croissance des bactéries dans le chemostat est le suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d(xV)}{dt} & = & \mu xV - F_{ex}x \\ \dfrac{d(sV)}{dt} & = & F_{in}s_{in} - F_{ex}s - \dfrac{\mu}{Y_{x/s}}xV \end{array}\right.$$

On distingue 3 types de fonctionnement dans le chemostat

1. en batch: pas d'entrée - pas de sortie
2. en fed-batch: entrée - pas de sortie
3. en continu : débit entrée = débit sortie

On distingue 3 types de fonctionnement dans le chemostat

1. en batch: pas d'entrée - pas de sortie
2. en fed-batch: entrée - pas de sortie
3. en continu : débit entrée = débit sortie

IPB
ENSTBB
BORDEAUX

On distingue 3 types de fonctionnement dans le chemostat

1. en batch: pas d'entrée - pas de sortie
2. en fed-batch: entrée - pas de sortie
3. en continu : débit entrée = débit sortie

On distingue 3 types de fonctionnement dans le chemostat

1. en batch: pas d'entrée - pas de sortie
2. en fed-batch: entrée - pas de sortie
3. en continu : débit entrée = débit sortie

Chemostat: batch

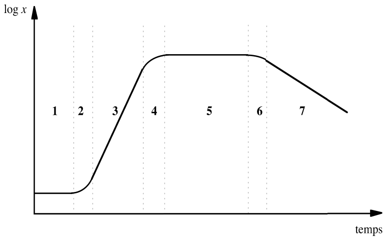


Fig. 1. Courbe de croissance d'une culture bactérienne et ses différentes phases (Buchanan, 1918). x représente la densité ou la biomasse de la culture. Les phases sont : (1) phase stationnaire initiale ou de latence, (2) phase d'accélération de la croissance, (3) phase de croissance à vitesse constante, (4) phase de ralentissement de la croissance, (5) phase stationnaire maximale, (6) et (7) phases de décroissance.

Les modèles de croissance sont utilisés pour rendre de compte des phases 2 à 5

Les

Chemostat: batch

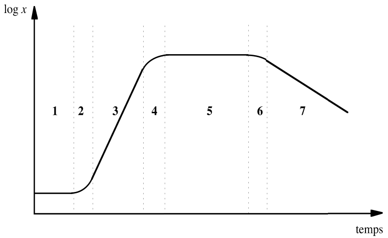


Fig. 1. Courbe de croissance d'une culture bactérienne et ses différentes phases (Buchanan, 1918). x représente la densité ou la biomasse de la culture. Les phases sont : (1) phase stationnaire initiale ou de latence, (2) phase d'accélération de la croissance, (3) phase de croissance à vitesse constante, (4) phase de ralentissement de la croissance, (5) phase stationnaire maximale, (6) et (7) phases de décroissance.

modèles de croissance sont utilisés pour rendre de compte des phases 2 à 5

Chemostat: batch

En "batch": l'entrée et la sortie sont nulles $F_{in} = F_{ex} = 0$ d'où $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex} = 0$ donc V est constant.

Le modèle mathématique

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{d(xV)}{dt} & = & \mu x V - F_{ex} x \\ \frac{d(sV)}{dt} & = & F_{in} s_{in} - F_{ex} s - \frac{\mu}{Y_{x/s}} x V \end{array}\right.$$

Comme $\frac{d(xV)}{dt} = x\frac{dV}{dt} + \frac{dx}{dt}V = \frac{dx}{dt}V$, en divisant par V, le modèle devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & \mu x \\ \frac{ds}{dt} & = & -\frac{\mu}{Y_{x/s}} x \end{array}\right.$$

Chemostat: batch

En "batch": l'entrée et la sortie sont nulles $F_{in} = F_{ex} = 0$ d'où $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex} = 0$ donc V est constant.

Le modèle mathématique

$$\begin{cases} \frac{d(xV)}{dt} &= \mu xV - F_{ex}x \\ \frac{d(sV)}{dt} &= F_{in}s_{in} - F_{ex}s - \frac{\mu}{Y_{x/s}}xV \end{cases}$$

Comme $\frac{d(xV)}{dt} = x\frac{dV}{dt} + \frac{dx}{dt}V = \frac{dx}{dt}V$, en divisant par V, le modèle devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \mu x \\ \frac{ds}{dt} &= -\frac{\mu}{Y_{x/s}}x \end{cases}$$

Chemostat: batch

En "batch": l'entrée et la sortie sont nulles $F_{in} = F_{ex} = 0$ d'où $\dfrac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex} = 0$ donc V est constant.

Le modèle mathématique

$$\begin{cases} \dfrac{d(xV)}{dt} & = \mu xV - F_{ex}x \\ \dfrac{d(sV)}{dt} & = F_{in}s_{in} - F_{ex}s - \dfrac{\mu}{Y_{x/s}}xV \end{cases}$$

Comme $\dfrac{d(xV)}{dt} = x\dfrac{dV}{dt} + \dfrac{dx}{dt}V = \dfrac{dx}{dt}V$, en divisant par V, le modèle devient

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = \mu x \\ \dfrac{ds}{dt} & = -\dfrac{\mu}{Y_{x/s}}x \end{cases}$$

Chemostat: batch

En "batch": l'entrée et la sortie sont nulles $F_{in} = F_{ex} = 0$ d'où $\dfrac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex} = 0$ donc V est constant.

Le modèle mathématique

$$\begin{cases} \dfrac{d(xV)}{dt} = \mu x V - F_{ex} x \\ \dfrac{d(sV)}{dt} = F_{in} s_{in} - F_{ex} s - \dfrac{\mu}{Y_{x/s}} x V \end{cases}$$

Comme $\dfrac{d(xV)}{dt} = x\dfrac{dV}{dt} + \dfrac{dx}{dt}V = \dfrac{dx}{dt}V$, en divisant par V, le modèle devient

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mu x \\ \dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{\mu}{Y_{x/s}} x \end{cases}$$

Chemostat: batch

En "batch": l'entrée et la sortie sont nulles $F_{in} = F_{ex} = 0$ d'où $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex} = 0$ donc V est constant.

Le modèle mathématique

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d(xV)}{dt} & = & \mu xV - F_{ex}x \\ \frac{d(sV)}{dt} & = & F_{in}s_{in} - F_{ex}s - \frac{\mu}{Y_{x/s}}xV \end{array} \right.$$

Comme $\frac{d(xV)}{dt} = x\frac{dV}{dt} + \frac{dx}{dt}V = \frac{dx}{dt}V$, en divisant par V, le modèle devient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & \mu x \\ \frac{ds}{dt} & = & -\frac{\mu}{Y_{x/s}}x \end{array} \right.$$

Chemostat: batch

En "batch": l'entrée et la sortie sont nulles $F_{in} = F_{ex} = 0$ d'où $\dfrac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex} = 0$ donc V est constant.

Le modèle mathématique

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d(xV)}{dt} & = & \mu xV - F_{ex}x \\ \dfrac{d(sV)}{dt} & = & F_{in}s_{in} - F_{ex}s - \dfrac{\mu}{Y_{x/s}}xV \end{array} \right.$$

Comme $\dfrac{d(xV)}{dt} = x\dfrac{dV}{dt} + \dfrac{dx}{dt}V = \dfrac{dx}{dt}V$, en divisant par V, le modèle devient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & \mu x \\ \dfrac{ds}{dt} & = & -\dfrac{\mu}{Y_{x/s}}x \end{array} \right.$$

Chemostat: batch

On obtient que $\frac{dx}{dt} + Y_{x/s}\frac{ds}{dt} = 0$. Si on suppose $Y_{x/s}$ constant, en intégrant, on tire que

$$x(t) + Y_{x/s}s(t) = Cte = x_m$$

Le sytème se réduit alors à une EDO et une équation algébrique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & \mu x \\ x(t) + Y_{x/s}s(t) & = & x_m \end{cases}$$

Chemostat: batch

On obtient que $\frac{dx}{dt} + Y_{x/s}\frac{ds}{dt} = 0$. Si on suppose $Y_{x/s}$ constant, en intégrant, on tire que

$$x(t) + Y_{x/s}s(t) = Cte = x_m$$

Le sytème se réduit alors à une EDO et une équation algébrique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & \mu x \\ x(t) + Y_{x/s}s(t) & = & x_m \end{cases}$$

Chemostat: batch

On obtient que $\dfrac{dx}{dt} + Y_{x/s}\dfrac{ds}{dt} = 0$. Si on suppose $Y_{x/s}$ constant, en intégrant, on tire que

$$x(t) + Y_{x/s}s(t) = Cte = x_m$$

Le sytème se réduit alors à une EDO et une équation algébrique

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & \mu x \\ x(t) + Y_{x/s}s(t) & = & x_m \end{cases}$$

Chemostat: batch

Notre sytème se réduit donc à une EDO et une équation algébrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & \mu x \\ x(t) + Y_{x/s} s(t) & = & x_m \end{array}\right.$$

En faisant différentes hypothèses pour μ (constante ou fonction ...), cela va nous conduire à différentes équations différentielles.

Chemostat: batch

Notre sytème se réduit donc à une EDO et une équation algébrique

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & \mu x \\ x(t) + Y_{x/s}s(t) & = & x_m \end{cases}$$

En faisant différentes hypothèses pour μ (constante ou fonction ...), cela va nous conduire à différentes équations différentielles.

Chemostat: batch

Notre sytème se réduit donc à une EDO et une équation algébrique

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & \mu x \\ x(t) + Y_{x/s}s(t) & = & x_m \end{cases}$$

En faisant différentes hypothèses pour μ (constante ou fonction ...), cela va nous conduire à différentes équations différentielles.

Chemostat: batch

Notre sytème se réduit donc à une EDO et une équation algébrique

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & \mu x \\ x(t) + Y_{x/s} s(t) & = & x_m \end{cases}$$

En faisant différentes hypothèses pour μ (constante ou fonction ...), cela va nous conduire à différentes équations différentielles.

Chemostat: batch- exponentiel $\mu = cte$

H1 (1ère hypothèse pour μ):
le taux de croissance est constant: $\mu = cte$
De

$$\frac{dx}{dt} = \mu x$$

on tire $x(t) = \lambda e^{\mu t}$.
C'est donc le modèle de Malthus (croissance exponentielle).

IPB
ENSTBB
BORDEAUX

Chemostat: batch- exponentiel $\mu = cte$

H1 (1ère hypothèse pour μ):
le taux de croissance est constant: $\mu = cte$
De

$$\frac{dx}{dt} = \mu x$$

on tire $x(t) = \lambda e^{\mu t}$.
C'est donc le modèle de Malthus (croissance exponentielle).

IPB
ENSTBB
BORDEAUX

Chemostat: batch- exponentiel $\mu = cte$

H1 (1ère hypothèse pour μ):
le taux de croissance est constant: $\mu = cte$
De

$$\frac{dx}{dt} = \mu x$$

on tire $x(t) = \lambda e^{\mu t}$.
C'est donc le modèle de Malthus (croissance exponentielle).

Chemostat: batch- exponentiel $\mu = cte$

H1 (1ère hypothèse pour μ):
le taux de croissance est constant: $\mu = cte$
De

$$\frac{dx}{dt} = \mu x$$

on tire $x(t) = \lambda e^{\mu t}$.
C'est donc le modèle de Malthus (croissance exponentielle).

Chemostat: batch- exponentiel $\mu = cte$

H1 (1ère hypothèse pour μ):
le taux de croissance est constant: $\mu = cte$
De

$$\frac{dx}{dt} = \mu x$$

on tire $x(t) = \lambda e^{\mu t}$.
C'est donc le modèle de Malthus (croissance exponentielle).

IPB
ENSTBB
BORDEAUX

Chemostat: batch- logistique $\mu = C \times s$

H2: le taux de croissance est linéaire par rapport à s:
$\mu = C \times s$ où $C = cte$
de $x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_m$,
on tire $x_m - x = Y_{x/s}s$
d'où $\mu = k(1 - \frac{x}{x_m})$
l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = k(1 - \frac{x}{x_m})x$$

c'est le modèle de verhulst (croissance logistique): on peut calculer x.

Chemostat: batch- logistique $\mu = C \times s$

H2: le taux de croissance est linéaire par rapport à s:
$\mu = C \times s$ où $C = cte$
de $x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_m$,
on tire $x_m - x = Y_{x/s}s$
d'où $\mu = k(1 - \frac{x}{x_m})$
l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = k(1 - \frac{x}{x_m})x$$

c'est le modèle de verhulst (croissance logistique): on peut calculer x.

Chemostat: batch- logistique $\mu = C \times s$

H2: le taux de croissance est linéaire par rapport à s:
$\mu = C \times s$ où $C = cte$
de $x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_m$,
on tire $x_m - x = Y_{x/s}s$
d'où $\mu = k(1 - \frac{x}{x_m})$
l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = k(1 - \frac{x}{x_m})x$$

c'est le modèle de verhulst (croissance logistique): on peut calculer x.

Chemostat: batch- logistique $\mu = C \times s$

H2: le taux de croissance est linéaire par rapport à s:

$\mu = C \times s$ où $C = cte$

de $x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_m$,

on tire $x_m - x = Y_{x/s}s$

d'où $\mu = k(1 - \frac{x}{x_m})$

l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = k(1 - \frac{x}{x_m})x$$

c'est le modèle de verhulst (croissance logistique): on peut calculer x.

IPB
ENSTBB
BORDEAUX

Chemostat: batch- logistique $\mu = C \times s$

H2: le taux de croissance est linéaire par rapport à s:

$\mu = C \times s$ où $C = cte$

de $x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_m$,

on tire $x_m - x = Y_{x/s}s$

d'où $\mu = k(1 - \frac{x}{x_m})$

l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = k(1 - \frac{x}{x_m})x$$

c'est le modèle de verhulst (croissance logistique): on peut calculer x.

Chemostat: batch- logistique $\mu = C \times s$

H2: le taux de croissance est linéaire par rapport à s:
$\mu = C \times s$ où $C = cte$
de $x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_m$,
on tire $x_m - x = Y_{x/s}s$
d'où $\mu = k(1 - \frac{x}{x_m})$
l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = k(1 - \frac{x}{x_m})x$$

c'est le modèle de verhulst (croissance logistique): on peut calculer x.

Chemostat: batch- $\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{k_s + s}$

H3: le taux de croissance est une fonction de s, fonction dite de Michaelis-Menten:

$$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{k_s + s}$$

où, $\mu_{max} = cte$ est le taux maximal de croissance, et $k_s = cte$ est la constante de demi saturation.

De $x_m - x = Y_{x/s}s$, l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = \mu_{max} \frac{x_m - x}{k_s Y_{x/s} + x_m - x} x$$

c'est le modèle de Monod: on ne sait plus calculer x.

Chemostat: batch- $\mu(s) = \mu_{max} \dfrac{s}{k_s + s}$

H3: le taux de croissance est une fonction de s, fonction dite de Michaelis-Menten:

$$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{k_s + s}$$

où, $\mu_{max} = cte$ est le taux maximal de croissance, et $k_s = cte$ est la constante de demi saturation.

De $x_m - x = Y_{x/s}s$, l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = \mu_{max} \frac{x_m - x}{k_s Y_{x/s} + x_m - x} x$$

c'est le modèle de Monod: on ne sait plus calculer x.

Chemostat: batch- $\mu(s) = \mu_{max} \dfrac{s}{k_s + s}$

H3: le taux de croissance est une fonction de s, fonction dite de Michaelis-Menten:

$$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{k_s + s}$$

où, $\mu_{max} = cte$ est le taux maximal de croissance, et $k_s = cte$ est la constante de demi saturation.

De $x_m - x = Y_{x/s} s$, l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = \mu_{max} \frac{x_m - x}{k_s Y_{x/s} + x_m - x} x$$

c'est le modèle de Monod: on ne sait plus calculer x.

Chemostat: batch- $\mu(s) = \mu_{max}\dfrac{s}{k_s + s}$

H3: le taux de croissance est une fonction de s, fonction dite de Michaelis-Menten:

$$\mu(s) = \mu_{max}\frac{s}{k_s + s}$$

où, $\mu_{max} = cte$ est le taux maximal de croissance, et $k_s = cte$ est la constante de demi saturation.

De $x_m - x = Y_{x/s}s$, l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = \mu_{max}\frac{x_m - x}{k_s Y_{x/s} + x_m - x}x$$

c'est le modèle de Monod: on ne sait plus calculer x.

Chemostat: batch- $\mu(s) = \mu_{max}\dfrac{s}{k_s + s}$

H3: le taux de croissance est une fonction de s, fonction dite de Michaelis-Menten:

$$\mu(s) = \mu_{max}\frac{s}{k_s + s}$$

où, $\mu_{max} = cte$ est le taux maximal de croissance, et $k_s = cte$ est la constante de demi saturation.

De $x_m - x = Y_{x/s}s$, l'ED devient

$$\frac{dx}{dt} = \mu_{max}\frac{x_m - x}{k_s Y_{x/s} + x_m - x}x$$

c'est le modèle de Monod: on ne sait plus calculer x.

Plan

On va rappeler le vocabulaire utilisé pour les équations différentielles. On cherche ici une fonction notée y définie sur un intervalle I:

$$y : \begin{array}{c} I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto y(t) \end{array}$$

y est dérivable et est l'inconnue.

Définitions

- EDO du 1er ordre
- ED/EDO du 1er ordre
- EDO autonome
- EDO linéaire/non linéaire
- Ordre d'une EDO

Plan

Plan

Objectif : donner des théorémes généraux d'existence, d'unicité des solutions d'une EDO, des renseignements sur le comportement de la solution sans avoir à la calculer explicitement. Faire des maths, pour ne plus en faire ensuite ! Soit U domaine du plan $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et f définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition

On appelle solution de l'équation différentielle du 1er *ordre*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t, y) \in U \tag{1}$$

tout couple $(I, \varphi(t))$ *tel que*

- I *est un intervalle ouvert non vide de* $\mathbb{R}$
- *l'application* $\varphi\ : t \mapsto \varphi(t)$ *est une fonction* **dérivable** *de* I *dans* $\mathbb{R}$
- *le graphe* $(t, \varphi(t))$ *est contenu dans* U
- $\forall t \in I,\ \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

1. Exemple 1:

$$y'(t) = y(t)$$
$$y(0) = y_0$$

2. Exemple 2:

$$y'(t) = y^2(t)$$
$$y(0) = y_0 > 0$$

Une solution est un couple $(I, y(t))$ où I est un intervalle inclus dans l'intervalle de définition de y.

1. Exemple 1:

$$y'(t) = y(t)$$
$$y(0) = y_0$$

2. Exemple 2:

$$y'(t) = y^2(t)$$
$$y(0) = y_0 > 0$$

Une solution est un couple $(I, y(t))$ où I est un intervalle inclus dans l'intervalle de définition de y.

1. Exemple 1:

$$y'(t) = y(t)$$
$$y(0) = y_0$$

2. Exemple 2:

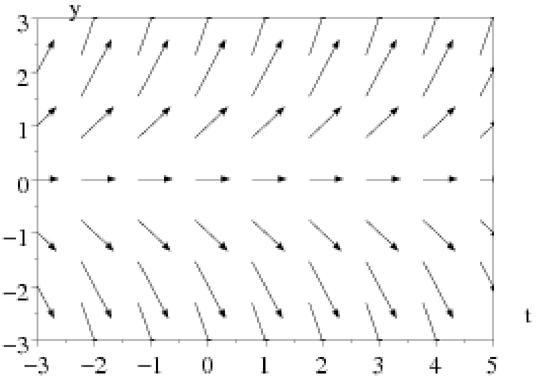
$$y'(t) = y^2(t)$$
$$y(0) = y_0 > 0$$

Une solution est un couple $(I, y(t))$ où I est un intervalle inclus dans l'intervalle de définition de y.

Définition

Champ de vecteurs

Le graphe d'une solution a pour tangente au point (t, y) *la droite de pente* $f(t, y)$. *Le tracé dans le plan* (t, y) *pour* $t_A \in I$ *des vecteurs d'origine* (t_A, y_A) *de pente* $f(t_A, y_A)$ *permet de visualiser globalement l'allure de l'ensemble des courbes solutions. On obtient ainsi un "champ de flèches" associé à l'équation différentielle. Une solution de l'équation est une fonction dont le graphe est tangent en chaque point à la flèche ayant pour origine ce point.*



Champ de vecteurs du modéle exponentiel

Définition

On appelle problème de Cauchy le système

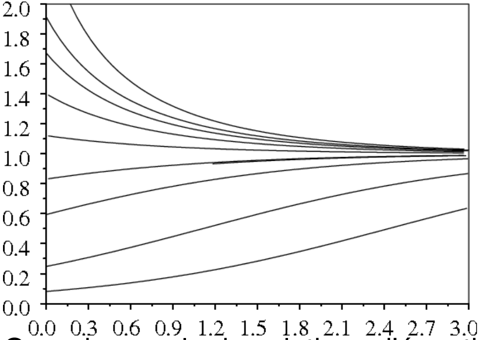
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

le couple (t_0, y_0) *est la donnée de Cauchy.*

Par chaque point (t_0, y_0) passe une courbe et une seule, appelée **trajectoire.** En faisant varier (t_0, y_0), on obtient une famille de courbes.

Trajectoires du modéle exponentiel

Trajectoires du modéle logistique



Quand on parle de solutions d'équations différentielles, on confond souvent la solution et son graphe (une courbe dans le plan (t, y)).

Une solution c'est un couple $(I, y(t))$ où I est inclus dans l'ensemble de définition de $y(t)$ (qui n'est pas nécessairement $\mathbb{R}$ tout entier).

Définition

Si une solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on dit qu'elle est **globale**.

Ex 1 : $(\mathbb{R}, y(t) = y_0 e^t)$ est une solution globale.

Définition

On appelle solution **maximale** *d'une EDO la solution qui n'est la restriction d'aucune autre solution.*

Ex 2 : $([\frac{1}{y_0} - 1; \frac{1}{y_0}[, \frac{1}{1/y_0 - t})$ n'est pas solution maximale.

Une solution c'est un couple $(I, y(t))$ où I est inclus dans l'ensemble de définition de $y(t)$ (qui n'est pas nécessairement $\mathbb{R}$ tout entier).

Définition

Si une solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on dit qu'elle est **globale**.

Ex 1 : $(\mathbb{R}, y(t) = y_0 e^t)$ est une solution globale.

Définition

On appelle solution **maximale** *d'une EDO la solution qui n'est la restriction d'aucune autre solution.*

Ex 2 : $([\frac{1}{y_0} - 1; \frac{1}{y_0}[, \frac{1}{1/y_0 - t})$ n'est pas solution maximale.

Une solution c'est un couple $(I, y(t))$ où I est inclus dans l'ensemble de définition de $y(t)$ (qui n'est pas nécessairement $\mathbb{R}$ tout entier).

Définition

Si une solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on dit qu'elle est **globale**.

Ex 1 : $(\mathbb{R}, y(t) = y_0 e^t)$ est une solution globale.

Définition

On appelle solution **maximale** *d'une EDO la solution qui n'est la restriction d'aucune autre solution.*

Ex 2 : $([\frac{1}{y_0} - 1; \frac{1}{y_0}[, \frac{1}{1/y_0 - t})$ n'est pas solution maximale.

Une solution c'est un couple $(I, y(t))$ où I est inclus dans l'ensemble de définition de $y(t)$ (qui n'est pas nécessairement $\mathbb{R}$ tout entier).

Définition

Si une solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on dit qu'elle est **globale**.

Ex 1 : $(\mathbb{R}, y(t) = y_0 e^t)$ est une solution globale.

Définition

On appelle solution **maximale** *d'une EDO la solution qui n'est la restriction d'aucune autre solution.*

Ex 2 : $([\frac{1}{y_0} - 1; \frac{1}{y_0}[, \frac{1}{1/y_0 - t})$ n'est pas solution maximale.

Une solution c'est un couple $(I, y(t))$ où I est inclus dans l'ensemble de définition de $y(t)$ (qui n'est pas nécessairement $\mathbb{R}$ tout entier).

Définition

Si une solution est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, on dit qu'elle est **globale***.*

Ex 1 : $(\mathbb{R}, y(t) = y_0 e^t)$ est une solution globale.

Définition

On appelle solution **maximale** *d'une EDO la solution qui n'est la restriction d'aucune autre solution.*

Ex 2 : $([\frac{1}{y_0} - 1; \frac{1}{y_0}[, \frac{1}{1/y_0 - t})$ n'est pas solution maximale.

Plan

1. Introduction
2. Des modèles de croissance par ED
3. Terminologie
4. Etude mathématique
5. Exemples

On va donner un théorème qui permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution d'un probléme de Cauchy (une EDO avec une condition initiale).
Pourquoi l'existence et l'unicité ?

Soient les deux problèmes de Cauchy suivants

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(3) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 3y^{2/3}(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

il faut garantir l'existence et l'unicité

Soient les deux problèmes de Cauchy suivants

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(3) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 3y^{2/3}(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

il faut garantir l'existence et l'unicité

Soient les deux problèmes de Cauchy suivants

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(t) = 2y(t) \\ y(3) = 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(t) = 3y^{2/3}(t) \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

il faut garantir l'existence et l'unicité

Soient les deux problèmes de Cauchy suivants

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(3) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 3y^{2/3}(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

il faut garantir l'existence et l'unicité

Théorème

Cauchy-Lipschitz : Unicité de la solution (maximale)

Si f et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans un ouvert U du plan des variables (t, y) alors si t_0 et y_0 appartiennent à ce domaine il existe une unique solution (maximale) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

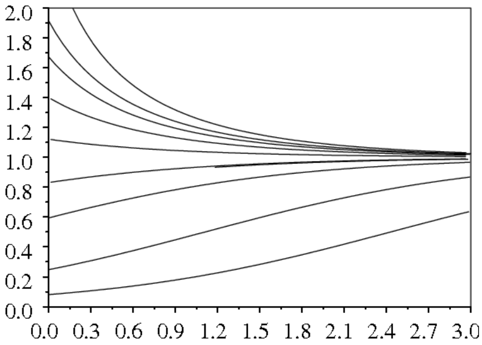
Conséquence du théoréme de Cauchy-Lipschitz:

deux solutions ne se coupent jamais

Conséquence du théoréme de Cauchy-Lipschitz:

deux solutions ne se coupent jamais

Trajectoires du modéle logistique



Plan

Définition

Point stationnaire (ou d'équilibre, ...)

Un point $\overline{y} \in \mathbb{R}$ est appelé point stationnaire de $y'(t) = f(t, y)$ si $f(t, \overline{y}) = 0$ pour tout t.

Proposition

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Si $y_0 = \overline{y}$ *est un point stationnaire alors* $\forall t \geq t_0$, $y(t) = \overline{y}$ *est solution.*

Plan

Objectif: décrire l'ensemble des trajectoires d'un problème de Cauchy en faisant varier la condition initiale.

Lemme

Supposons que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

admette une unique solution notée $(I_{y_0}, \varphi_{y_0}(t))$ *alors*

i) $\varphi_{y_0}(t)$ *est monotone en* t.

ii) $\varphi_{y_0}(t) < \varphi_{x_0}(t), \forall t \in I_{y_0} \cap I_{x_0}$ *si* $y_0 < x_0$.

iii) *Si* $\varphi_{y_0}(t)$ *est bornée alors la solution est définie sur* $[t_0, +\infty[$ *et* $\lim_{t \to +\infty} \varphi_{y_0}(t) = \overline{y}$ *où* $\overline{y}$ *est un point stationnaire.*

Lemme

Supposons que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

admette une unique solution notée $(I_{y_0}, \varphi_{y_0}(t))$ *alors*

i) $\varphi_{y_0}(t)$ *est monotone en* t.

ii) $\varphi_{y_0}(t) < \varphi_{x_0}(t), \forall t \in I_{y_0} \cap I_{x_0}$ *si* $y_0 < x_0$.

iii) *Si* $\varphi_{y_0}(t)$ *est bornée alors la solution est définie sur* $[t_0, +\infty[$ *et* $\lim_{t \to +\infty} \varphi_{y_0}(t) = \bar{y}$ *où* $\bar{y}$ *est un point stationnaire.*

Lemme

Supposons que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

admette une unique solution notée $(I_{y_0}, \varphi_{y_0}(t))$ *alors*

i) $\varphi_{y_0}(t)$ *est monotone en* t.

ii) $\varphi_{y_0}(t) < \varphi_{x_0}(t), \forall t \in I_{y_0} \cap I_{x_0}$ *si* $y_0 < x_0$.

iii) *Si* $\varphi_{y_0}(t)$ *est bornée alors la solution est définie sur* $[t_0, +\infty[$ *et* $\lim_{t \to +\infty} \varphi_{y_0}(t) = \overline{y}$ *où* $\overline{y}$ *est un point stationnaire.*

Lemme

Supposons que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

admette une unique solution notée $(I_{y_0}, \varphi_{y_0}(t))$ *alors*

i) $\varphi_{y_0}(t)$ *est monotone en* t.

ii) $\varphi_{y_0}(t) < \varphi_{x_0}(t), \forall t \in I_{y_0} \cap I_{x_0}$ *si* $y_0 < x_0$.

iii) *Si* $\varphi_{y_0}(t)$ *est bornée alors la solution est définie sur* $[t_0, +\infty[$ *et* $\lim_{t \to +\infty} \varphi_{y_0}(t) = \overline{y}$ *où* $\overline{y}$ *est un point stationnaire.*

Lemme

On suppose que f vérifie les hypothèses du théorème de C.L.
Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'unique solution y définie sur I contenant $]t_0, T_{max}[$ est telle que soit $T_{max} = +\infty$
soit $T_{max} < +\infty$ et $\lim\limits_{t \mapsto T_{max}} |y(t)| = +\infty$.

Plan

1. Introduction
2. Des modèles de croissance par ED
3. Terminologie
4. Etude mathématique
5. Exemples

Théorème

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

On suppose que $f(x, 0) \geq 0$ et $y_0 \geq 0$ alors $y(x) \geq 0$ tant qu'elle existe.

Théorème

Soient les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

On suppose que

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \forall t \geq t_0 \quad \begin{array}{l} f(t,u) \geq g(t,u) \\ y_0 \geq z_0 \end{array}$$

alors $y(t) \geq z(t)$ tant que les deux existent.

Plan

Nous sommes maintenant capables d'étudier

- Modèle de Malthus (croissance exponentielle)
- Modèle de Verhulst (croissance logistique)
- Modèle de Monod
- ...