Séries Numériques

2ème année CPP

Année Universitaire 2014-15

Achille et sa tortue

...Supposons pour simplifier le raisonnement que chaque concurrent court à vitesse constante, l'un très rapidement, et l'autre très lentement ; au bout d'un certain temps, Achille aura comblé ses cent mètres de retard et atteint le point de départ de la tortue ; mais pendant ce temps, la tortue aura parcouru une certaine distance, certes beaucoup plus courte, mais non nulle, disons un mètre. Cela demandera alors à Achille un temps supplémentaire pour parcourir cette distance, pendant lequel la tortue avancera encore plus loin ; et puis une autre durée avant d'atteindre ce troisième point, alors que la tortue aura encore progressé. Ainsi, toutes les fois qu'Achille atteint l'endroit où la tortue se trouvait, elle se retrouve encore plus loin. Par conséquent, le rapide Achille n'a jamais pu et ne pourra jamais rattraper la tortue».

L'erreur mathématique introduite dans le paradoxe consiste à affirmer que la somme de cette infinité d'événements de plus en plus brefs tend vers l'infini, c'est-à-dire qu'Achille n'arrive jamais (temps infini) à rattraper la tortue.

Plan

Plan

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle suite des sommes partielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Définition

On dit que la série de terme général u_n, converge $\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sinon, on dit qu'elle diverge.

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle suite des sommes partielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Définition

On dit que la série de terme général u_n, converge $\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sinon, on dit qu'elle diverge.

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle suite des sommes partielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Définition

On dit que la série de terme général u_n, converge $\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sinon, on dit qu'elle diverge.

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série de terme général u_n, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers le nombre (fini)** *s, on note*

$$s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

et on dit que la série de terme général u_n (ou la série $\sum u_n$) est **convergente** *de somme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = s$. Dans tous les autres cas (ie si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite ou a une limite infinie), on dit que la série est* **divergente**.

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série de terme général u_n, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers le nombre (fini)** *s, on note*

$$s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

et on dit que la série de terme général u_n (ou la série $\sum u_n$) est **convergente** *de somme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = s$. Dans tous les autres cas (ie si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite ou a une limite infinie), on dit que la série est* **divergente**.

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série de terme général u_n, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers le nombre (fini)** *s, on note*

$$s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

et on dit que la série de terme général u_n (ou la série $\sum u_n$) est **convergente** *de somme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = s$. Dans tous les autres cas (ie si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite ou a une limite infinie), on dit que la série est* **divergente**.

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série de terme général u_n, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers le nombre (fini)** *s, on note*

$$s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

et on dit que la série de terme général u_n (ou la série $\sum u_n$) est **convergente** *de somme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = s$. Dans tous les autres cas (ie si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite ou a une limite infinie), on dit que la série est* **divergente**.

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série de terme général* u_n*, la suite* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers le nombre (fini)** s*, on note*

$$s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

et on dit que la série de terme général u_n *(ou la série* $\sum u_n$*) est* **convergente** *de somme* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = s$. *Dans tous les autres cas (ie si la suite* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite ou a une limite infinie), on dit que la série est* **divergente**.

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série de terme général u_n, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers le nombre (fini)** *s, on note*

$$s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

et on dit que la série de terme général u_n (ou la série $\sum u_n$) est **convergente** *de somme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = s$. Dans tous les autres cas (ie si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite ou a une limite infinie), on dit que la série est* **divergente**.

Définition

La nature d'une série est le fait qu'elle converge ou diverge.

Notation : La série de terme général u_n se notera $\sum u_n$.
Mais on évitera d'écrire (sauf peut-être pour les séries positives)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$$

Attention, il ne s'agit pas vraiment d'une somme mais d'une limite...

Définition

La nature d'une série est le fait qu'elle converge ou diverge.

Notation : La série de terme général u_n se notera $\sum u_n$.
Mais on évitera d'écrire (sauf peut-être pour les séries positives)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$$

Attention, il ne s'agit pas vraiment d'une somme mais d'une limite...

Définition

La nature d'une série est le fait qu'elle converge ou diverge.

Notation : La série de terme général u_n se notera $\sum u_n$.
Mais on évitera d'écrire (sauf peut-être pour les séries positives)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$$

Attention, il ne s'agit pas vraiment d'une somme mais d'une limite...

Définition

La nature d'une série est le fait qu'elle converge ou diverge.

Notation : La série de terme général u_n se notera $\sum u_n$.
Mais on évitera d'écrire (sauf peut-être pour les séries positives)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$$

Attention, il ne s'agit pas vraiment d'une somme mais d'une limite...

Définition (Reste d'une série)

Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge vers s, on définit le reste d'ordre n de la série, noté r_n, par

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

.

Définition (Reste d'une série)

Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge vers s, on définit le reste d'ordre n de la série, noté r_n, par

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

.

Etudier une série est donc simplement étudier une suite, la suite des sommes partielles de (u_n).

Le but de ce chapitre est de développer des techniques particulières pour étudier des séries sans nécessairement étudier la suite des sommes partielles.

Etudier une série est donc simplement étudier une suite, la suite des sommes partielles de (u_n).
Le but de ce chapitre est de développer des techniques particulières pour étudier des séries sans nécessairement étudier la suite des sommes partielles.

Plan

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$)

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

(somme des termes d'une suite géométrique).
Par conséquent $\lim_{n \to +\infty} s_n = 2$ *ce que nous écrivons*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression condensée simple de s_n .

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n}$)

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

(somme des termes d'une suite géométrique).

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} s_n = 2$ *ce que nous écrivons*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression condensée simple de s_n .

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$)

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

(somme des termes d'une suite géométrique).

Par conséquent $\lim_{n \to +\infty} s_n = 2$ *ce que nous écrivons*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression condensée simple de s_n .

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$)

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

(somme des termes d'une suite géométrique).
Par conséquent $\lim_{n \to +\infty} s_n = 2$ *ce que nous écrivons*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression condensée simple de s_n .

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n}$)

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

(somme des termes d'une suite géométrique).
Par conséquent $\lim_{n \to +\infty} s_n = 2$ *ce que nous écrivons*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression condensée simple de s_n .

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n}$)

On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

(somme des termes d'une suite géométrique).
Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} s_n = 2$ *ce que nous écrivons*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression condensée simple de s_n .

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$)

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

Par conséquent, cette série est divergente.

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$)

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

Par conséquent, cette série est divergente.

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$)

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

Par conséquent, cette série est divergente.

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$)

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

Par conséquent, cette série est divergente.

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$)

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

Par conséquent, cette série est divergente.

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Si la série était convergente vers s alors on aurait* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *et* $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$*,et donc* $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$*. Or*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, cette série, appelée **série harmonique**, *est divergente. De plus on a (notation abusive)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(comme suite croissante non convergente)

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Si la série était convergente vers s alors on aurait* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *et* $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$*,et donc* $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$. *Or*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, cette série, appelée **série harmonique**, *est divergente. De plus on a (notation abusive)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(comme suite croissante non convergente)

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Si la série était convergente vers s alors on aurait* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *et* $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$, *et donc* $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$. *Or*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, cette série, appelée ***série harmonique****, est divergente. De plus on a (notation abusive)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(comme suite croissante non convergente)

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Si la série était convergente vers s alors on aurait* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *et* $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$*,et donc* $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$. *Or*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, cette série, appelée **série harmonique**, *est divergente. De plus on a (notation abusive)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(comme suite croissante non convergente)

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Si la série était convergente vers s alors on aurait* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *et* $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$*,et donc* $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$. *Or*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, cette série, appelée **série harmonique**, *est divergente. De plus on a (notation abusive)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(comme suite croissante non convergente)

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. *Si la série était convergente vers s alors on aurait* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *et* $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$*,et donc* $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$*. Or*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, cette série, appelée **série harmonique**, *est divergente. De plus on a (notation abusive)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(comme suite croissante non convergente)

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Si la série était convergente vers s alors on aurait* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *et* $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$*,et donc* $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$. *Or*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, cette série, appelée **série harmonique***, est divergente. De plus on a (notation abusive)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(comme suite croissante non convergente)

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. *Si la série était convergente vers s alors on aurait* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *et* $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$*,et donc* $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$. *Or*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, cette série, appelée **série harmonique**, *est divergente.* *De plus on a (notation abusive)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(comme suite croissante non convergente)

Exemple (Etude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Si la série était convergente vers s alors on aurait* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ *et* $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$*,et donc* $\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$. *Or*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, cette série, appelée **série harmonique**, *est divergente. De plus on a (notation abusive)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

(comme suite croissante non convergente)

Plan

Remarque

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et si on pose $a_n = Re(u_n)$, $b_n = Im(u_n)$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a_n + ib_n$ et par conséquent

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Ainsi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Remarque

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et si on pose $a_n = Re(u_n)$, $b_n = Im(u_n)$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a_n + ib_n$ et par conséquent

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + i \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Ainsi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Remarque

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et si on pose $a_n = Re(u_n)$, $b_n = Im(u_n)$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a_n + ib_n$ et par conséquent

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + i \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Ainsi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Remarque

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et si on pose $a_n = Re(u_n)$, $b_n = Im(u_n)$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a_n + ib_n$ et par conséquent

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + i \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Ainsi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Remarque

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et si on pose $a_n = Re(u_n)$, $b_n = Im(u_n)$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a_n + ib_n$ et par conséquent

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + i \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Ainsi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Remarque

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et si on pose $a_n = Re(u_n)$, $b_n = Im(u_n)$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a_n + ib_n$ et par conséquent

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + i \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Ainsi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et on a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Proposition

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Si leurs termes ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices alors les deux séries sont de même nature (ie elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Remarques : mais attention si elles convergent, leurs sommes sont différentes.

La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes...cela justifie la notation $\sum u_n$ sans indice pour le signe de sommation (mais attention quand on calculera une somme, les indices sont importants).

Proposition

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Si leurs termes ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices alors les deux séries sont de même nature (ie elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Remarques : mais attention si elles convergent, leurs sommes sont différentes.

La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes...cela justifie la notation $\sum u_n$ sans indice pour le signe de sommation (mais attention quand on calculera une somme, les indices sont importants).

Proposition

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Si leurs termes ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices alors les deux séries sont de même nature (ie elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Remarques : mais attention si elles convergent, leurs sommes sont différentes.

La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes...cela justifie la notation $\sum u_n$ sans indice pour le signe de sommation (mais attention quand on calculera une somme, les indices sont importants).

Proposition

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Si leurs termes ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices alors les deux séries sont de même nature (ie elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Remarques : mais attention si elles convergent, leurs sommes sont différentes.

La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes...cela justifie la notation $\sum u_n$ sans indice pour le signe de sommation (mais attention quand on calculera une somme, les indices sont importants).

Proposition

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Si leurs termes ne diffèrent que pour un nombre fini d'indices alors les deux séries sont de même nature (ie elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Remarques : mais attention si elles convergent, leurs sommes sont différentes.
La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes...cela justifie la notation $\sum u_n$ sans indice pour le signe de sommation (mais attention quand on calculera une somme, les indices sont importants).

Plan

Théorème

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes de sommes u et v. Soit λ un nombre réel (ou complexe) quelconque. *Alors*

- *la série $\sum u_n + v_n$ est convergente de somme $u + v$*
- *et la série $\sum \lambda u_n$ est convergente de somme λu.*

(une notion sous-jacente d'espace vectoriel des séries convergentes)

Théorème

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes de sommes u et v. Soit λ un nombre réel (ou complexe) quelconque. Alors

- *la série $\sum u_n + v_n$ est convergente de somme $u + v$*
- *et la série $\sum \lambda u_n$ est convergente de somme λu.*

(une notion sous-jacente d'espace vectoriel des séries convergentes)

Théorème

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes de sommes u et v. Soit λ un nombre réel (ou complexe) quelconque. Alors

- *la série $\sum u_n + v_n$ est convergente de somme $u + v$*
- *et la série $\sum \lambda u_n$ est convergente de somme λu.*

(une notion sous-jacente d'espace vectoriel des séries convergentes)

Théorème

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes de sommes u et v. Soit λ un nombre réel (ou complexe) quelconque. Alors

- *la série $\sum u_n + v_n$ est convergente de somme $u + v$*
- *et la série $\sum \lambda u_n$ est convergente de somme λu.*

(une notion sous-jacente d'espace vectoriel des séries convergentes)

Remarque

Pour étudier une série de terme négatif $\sum u_n$ *, on pourra donc étudier la série de terme positif* $\sum v_n$ *où* $v_n = -u_n$ *et utiliser le théorème précédent en prenant* $\lambda = -1$.

Plan

Théorème

Si une série de terme général u_n est convergente, alors on a nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Attention, cette condition n'est pas suffisante pour affirmer la convergence d'une série.

Exemple

La série harmonique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$

Théorème

Si une série de terme général u_n est convergente, alors on a nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Attention, cette condition n'est pas suffisante pour affirmer la convergence d'une série.

Exemple

La série harmonique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$

Théorème

Si une série de terme général u_n est convergente, alors on a nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Attention, cette condition n'est pas suffisante pour affirmer la convergence d'une série.

Exemple

La série harmonique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$

Proposition

Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0*, alors la série considérée est divergente. On dit grossièrement ou trivialement divergente.*

Exemple

La série de terme général $u_n = (-1)^n$ *est grossièrement divergente.*

Proposition

Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0*, alors la série considérée est divergente. On dit grossièrement ou trivialement divergente.*

Exemple

La série de terme général $u_n = (-1)^n$ *est grossièrement divergente.*

Proposition

Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0*, alors la série considérée est divergente. On dit grossièrement ou trivialement divergente.*

Exemple

La série de terme général $u_n = (-1)^n$ *est grossièrement divergente.*

Plan

Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ *est une série à termes positifs* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0.$

Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ *est une série à termes positifs à partir d'un certain rang* $\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant 0$

Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ *est une série à termes positifs* $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geqslant 0.$

Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ *est une série à termes positifs à partir d'un certain rang* $\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant 0$

Théorème (fondamental)

Une série de terme général u_n **positif** *à partir d'un certain rang est convergente si et seulement si la suite (s_n) des sommes partielles est majorée. La somme $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série est alors égale à la borne supérieure de l'ensemble $\{\forall n \in \mathbb{N},\ s_n\}$, et*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq s.$$

Exemple (série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

dont la borne supérieure est 2.

Théorème (fondamental)

Une série de terme général u_n **positif** *à partir d'un certain rang est convergente si et seulement si la suite (s_n) des sommes partielles est majorée. La somme $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série est alors égale à la borne supérieure de l'ensemble $\{\forall n \in \mathbb{N},\ s_n\}$, et*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq s.$$

Exemple (série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n}$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

dont la borne supérieure est 2.

Théorème (fondamental)

Une série de terme général u_n **positif** *à partir d'un certain rang est convergente si et seulement si la suite (s_n) des sommes partielles est majorée. La somme $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série est alors égale à la borne supérieure de l'ensemble $\{\forall n \in \mathbb{N},\ s_n\}$, et*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq s.$$

Exemple (série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n}$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

dont la borne supérieure est 2.

Théorème (comparaison)

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **positives** *à partir d'un certain rang N, telles que $\forall n \geqslant N, u_n \leqslant v_n$*

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple (série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$)

On peut la comparer à la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$

Théorème (comparaison)

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **positives** *à partir d'un certain rang N, telles que $\forall n \geqslant N, u_n \leqslant v_n$*

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple (série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$)

On peut la comparer à la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$

Théorème (comparaison)

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **positives** *à partir d'un certain rang N, telles que $\forall n \geqslant N, u_n \leqslant v_n$*
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple (série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$)

On peut la comparer à la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$

Théorème (Comparaison à une intégrale impropre)

Soit f une application positive et décroissante sur $[a, +\infty[$, alors la série $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. Et si elles convergent, $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$ pour tout $n > a$.

Plan

Corollaire

La série de terme général $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ *est*

- *convergente si* $\alpha > 1$,
- *divergente si* $\alpha \leq 1$.

Elle s'appelle série de Riemann.

Théorème (série géométrique)

Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général x^n converge $\Leftrightarrow |x| < 1$.

De plus, si $\Leftrightarrow |x| < 1$, la somme est $s = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Plan

Critère d'équivalence

Théorème

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ strictement positives à partir d'un certain rang N. On suppose que l'une des conditions suivantes est vérifiée

1. *il existe m et M tels que* $0 < m \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq M$
2. *la suite* $(\dfrac{u_n}{v_n})$ *(définie à partir d'un certain rang) admet une limite finie non nulle (en $+\infty$)*
3. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple

Série de terme général $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n^2})$.

Plan

Corollaire

Soit α et k deux réels non nuls, si $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Exemple

Série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3 - 1}}$.

Corollaire

Soit α *et* k *deux réels non nuls, si* $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$ *, alors* $\sum u_n$ *converge* $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Exemple

Série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3 - 1}}$.

Corollaire (Règle de Riemann)

- *Pour qu'une série à termes positifs* $\sum u_n$ *soit convergente, il suffit qu'il existe un réel* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $n^\alpha u_n$ *soit majorée, à partir d'un certain rang.*
- *Pour qu'une série à termes positifs* $\sum u_n$ *soit divergente, il suffit qu'il existe un réel* $\alpha \leq 1$ *tel qu'on ait* $n^\alpha u_n$ *soit minorée, à partir d'un certain rang.*

Exemple

Série de terme général $u_n = n^3 e^{-n}$

Corollaire (Règle de Riemann)

- *Pour qu'une série à termes positifs* $\sum u_n$ *soit convergente, il suffit qu'il existe un réel* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $n^\alpha u_n$ *soit majorée, à partir d'un certain rang.*
- *Pour qu'une série à termes positifs* $\sum u_n$ *soit divergente, il suffit qu'il existe un réel* $\alpha \leq 1$ *tel qu'on ait* $n^\alpha u_n$ *soit minorée, à partir d'un certain rang.*

Exemple

Série de terme général $u_n = n^3 e^{-n}$

Plan

Théorème (Règle de d'Alembert)

$\sum u_n$ une série à termes positifs non nuls (à partir d'un certain rang) telle que : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement,
si $l < 1$, $\sum u_n$ converge,
et si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple

Série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

Théorème (Règle de d'Alembert)

$\sum u_n$ une série à termes positifs non nuls (à partir d'un certain rang) telle que : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement,

si $l < 1$, $\sum u_n$ converge,

et si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple

Série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

Plan

Définition (série absolument convergente)

Une série $\sum u_n$ est absolument convergente $\Leftrightarrow \sum |u_n|$ est convergente. Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

Théorème

Une série à terme réels (ou complexes) absolument convergente est convergente.

Remarque

La convergence absolue est une condition **suffisante** *de convergence* **mais non nécessaire***: il existe des séries non absolument convergentes mais convergentes.*

Définition (série absolument convergente)

Une série $\sum u_n$ est absolument convergente $\Leftrightarrow \sum |u_n|$ est convergente. Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

Théorème

Une série à terme réels (ou complexes) absolument convergente est convergente.

Remarque

La convergence absolue est une condition **suffisante** *de convergence* **mais non nécessaire***: il existe des séries non absolument convergentes mais convergentes.*

Définition (série absolument convergente)

Une série $\sum u_n$ est absolument convergente $\Leftrightarrow \sum |u_n|$ est convergente. Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

Théorème

Une série à terme réels (ou complexes) absolument convergente est convergente.

Remarque

La convergence absolue est une condition **suffisante** *de convergence* **mais non nécessaire***: il existe des séries non absolument convergentes mais convergentes.*

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. *La série est absolument convergente donc convergente.*

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

La série n'est pas absolument convergente mais on verra qu'elle est convergente, elle est donc semi-convergente.

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. *La série est absolument convergente donc convergente.*

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

La série n'est pas absolument convergente mais on verra qu'elle est convergente, elle est donc semi-convergente.

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. *La série est absolument convergente donc convergente.*

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

La série n'est pas absolument convergente mais on verra qu'elle est convergente, elle est donc semi-convergente.

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. *La série est absolument convergente donc convergente.*

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

La série n'est pas absolument convergente mais on verra qu'elle est convergente, elle est donc semi-convergente.

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. *La série est absolument convergente donc convergente.*

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

La série n'est pas absolument convergente mais on verra qu'elle est convergente, elle est donc semi-convergente.

Plan

1. Introduction
2. Notions Générales
3. Séries à termes positifs
4. Autres Séries

Définition

La série $\sum u_n$ *est alternée si le terme général s'écrit, pour tout entier* n*, sous la forme* $u_n = (-1)^n v_n$ *avec* $v_n \geq 0$.
On parle aussi de série alternée à partir d'un certain rang.

Théorème

Soit la série alternée $\sum u_n = \sum (-1)^n v_n$ *avec* $v_n \geq 0$ *telle que*

- *la suite* (v_n) *est décroissante,*
- *la suite* (v_n) *tend vers 0 à l'infini*

alors $\sum u_n$ *est convergente.*

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
La série n'est pas absolument convergente mais elle est convergente.

Théorème

Soit la série alternée $\sum u_n = \sum (-1)^n v_n$ *avec* $v_n \geq 0$ *telle que*

- *la suite* (v_n) *est décroissante,*
- *la suite* (v_n) *tend vers 0 à l'infini*

alors $\sum u_n$ *est convergente.*

Exemple

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
La série n'est pas absolument convergente mais elle est convergente.

Plan

1. Introduction
2. Notions Générales
3. Séries à termes positifs
4. Autres Séries

Théorème

On considère deux séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *absolument convergentes. Alors la série* $\sum w_n$ *où* $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$ *est absolument convergente et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Exemple

Produit des séries de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ *et* $v_n = \dfrac{y^n}{n!}$