Inverse d'une matrice carrée

1ère année

E.N.S.T.B.B.
Bordeaux INP

Année Universitaire 2015-16

Plan

Bordeaux INP
ENSTBB

Plan

Nous nous intéressons ici aux **matrices carrées** (autant de lignes que de colonnes) en vue de la résolution de $Ax = b$ (autant d'équations que d'inconnues). Lorsqu'on dispose d'une équation scalaire $ax = b$, pour déterminer x, il suffit de multiplier (à droite ou à gauche) l'équation par l'inverse de a si a est non nul. En effet tout réel admet un inverse, noté $\frac{1}{a}$ ou encore a^{-1}, à l'exception de 0 vérifiant

$$a^{-1}a = 1$$

. Et le produit est commutatif ($2 \times 3 = 3 \times 2$). En multipliant par l'inverse, on obtient

$$a^{-1}ax = a^{-1}b$$

d'où

$$x = a^{-1}b$$

Nous nous intéressons ici aux **matrices carrées** (autant de lignes que de colonnes) en vue de la résolution de $Ax = b$ (autant d'équations que d'inconnues). Lorsqu'on dispose d'une équation scalaire $ax = b$, pour déterminer x, il suffit de multiplier (à droite ou à gauche) l'équation par l'inverse de a si a est non nul. En effet tout réel admet un inverse, noté $\frac{1}{a}$ ou encore a^{-1}, à l'exception de 0 vérifiant

$$a^{-1}a = 1$$

. Et le produit est commutatif ($2 \times 3 = 3 \times 2$). En multipliant par l'inverse, on obtient

$$a^{-1}ax = a^{-1}b$$

d'où

$$x = a^{-1}b$$

Nous nous intéressons ici aux **matrices carrées** (autant de lignes que de colonnes) en vue de la résolution de $Ax = b$ (autant d'équations que d'inconnues). Lorsqu'on dispose d'une équation scalaire $ax = b$, pour déterminer x, il suffit de multiplier (à droite ou à gauche) l'équation par l'inverse de a si a est non nul. En effet tout réel admet un inverse, noté $\frac{1}{a}$ ou encore a^{-1}, à l'exception de 0 vérifiant

$$a^{-1}a = 1$$

. Et le produit est commutatif ($2 \times 3 = 3 \times 2$). En multipliant par l'inverse, on obtient

$$a^{-1}ax = a^{-1}b$$

d'où

$$x = a^{-1}b$$

Nous nous intéressons ici aux **matrices carrées** (autant de lignes que de colonnes) en vue de la résolution de $Ax = b$ (autant d'équations que d'inconnues). Lorsqu'on dispose d'une équation scalaire $ax = b$, pour déterminer x, il suffit de multiplier (à droite ou à gauche) l'équation par l'inverse de a si a est non nul. En effet tout réel admet un inverse, noté $\frac{1}{a}$ ou encore a^{-1}, à l'exception de 0 vérifiant

$$a^{-1}a = 1$$

. Et le produit est commutatif ($2 \times 3 = 3 \times 2$). En multipliant par l'inverse, on obtient

$$a^{-1}ax = a^{-1}b$$

d'où

$$x = a^{-1}b$$

La démarche pour le calcul matriciel peut être la même mais d'une part le produit matriciel n'est pas commutatif ($AB \neq BA$) et d'autre part toute matrice A n'admet pas d'inverse... Dans ce qui suit, nous définissons la notion de matrice inverse d'une matrice carrée et donnons une méthode pour la calculer (lorsqu'elle existe!).

Bordeaux INP
ENSTBB

La démarche pour le calcul matriciel peut être la même mais d'une part le produit matriciel n'est pas commutatif ($AB \neq BA$) et d'autre part toute matrice A n'admet pas d'inverse... Dans ce qui suit, nous définissons la notion de matrice inverse d'une matrice carrée et donnons une méthode pour la calculer (lorsqu'elle existe!).

Bordeaux INP
ENSTBB

Plan

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Définition

On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.
On appelle B matrice inverse de A et on la note

$$A^{-1}$$

Remarque :
Ecrire $\frac{B}{A}$ n'a pas de sens a priori parce que toute matrice n'a pas d'inverse et qu'on ne sait pas s'il faut multiplier B par l'inverse de A à gauche ou à droite.

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Définition

On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.

On appelle B matrice inverse de A et on la note

$$A^{-1}$$

Remarque :

Ecrire $\dfrac{B}{A}$ n'a pas de sens a priori parce que toute matrice n'a pas d'inverse et qu'on ne sait pas s'il faut multiplier B par l'inverse de A à gauche ou à droite.

Bordeaux INP
ENSTBB

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Définition

On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.
On appelle B matrice inverse de A et on la note

$$A^{-1}$$

Remarque :
Ecrire $\frac{B}{A}$ n'a pas de sens a priori parce que toute matrice n'a pas d'inverse et qu'on ne sait pas s'il faut multiplier B par l'inverse de A à gauche ou à droite.

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Définition

On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.
On appelle B matrice inverse de A et on la note

$$A^{-1}$$

Remarque :
Ecrire $\frac{B}{A}$ n'a pas de sens a priori parce que toute matrice n'a pas d'inverse et qu'on ne sait pas s'il faut multiplier B par l'inverse de A à gauche ou à droite.

Bordeaux INP
ENSTBB

Proposition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, inversibles.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Proposition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, inversibles.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Bordeaux INP
ENSTBB

Proposition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, inversibles.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Bordeaux INP
ENSTBB

Plan

Soit A une matrice carrée d'ordre n, inversible. Calcul de l'inverse de A : il existe plusieurs méthodes

1. par résolution du système linéaire $Ax = y$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
2. par la méthode des cofacteurs (utilise la notion de déterminant d'une matrice)
3. par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

Soit A une matrice carrée d'ordre n, inversible. Calcul de l'inverse de A : il existe plusieurs méthodes

1. par résolution du système linéaire $Ax = y$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

   et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
2. par la méthode des cofacteurs (utilise la notion de déterminant d'une matrice)
3. par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

Soit A une matrice carrée d'ordre n, inversible. Calcul de l'inverse de A : il existe plusieurs méthodes

1. par résolution du système linéaire $Ax = y$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$
2. par la méthode des cofacteurs (utilise la notion de déterminant d'une matrice)
3. par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

Bordeaux INP
ENSTBB

Soit A une matrice carrée d'ordre n, inversible. Calcul de l'inverse de A : il existe plusieurs méthodes

1. par résolution du système linéaire $Ax = y$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
2. par la méthode des cofacteurs (utilise la notion de déterminant d'une matrice)
3. par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

Résolution du système linéaire $Ax = y$: exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E) : Ax = y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_1 + 3x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & y_2 - 2y_3 - 3(y_1 - y_3) \end{array} \right.$$

Résolution du système linéaire $Ax = y$: exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E) : Ax = y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_1 + 3x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & y_2 - 2y_3 - 3(y_1 - y_3) \end{array} \right.$$

Résolution du système linéaire $Ax = y$: exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E) : Ax = y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_1 + 3x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & y_2 - 2y_3 - 3(y_1 - y_3) \end{array} \right.$$

Résolution du système linéaire $Ax = y$: exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E) : Ax = y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_1 + 3x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & y_2 - 2y_3 - 3(y_1 - y_3) \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & -3y_1 + y_2 + y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & -3y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & -3y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

De $Ax = y$, en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient

$$x = A^{-1} y$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

On a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

De $Ax = y$, en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient

$$x = A^{-1}y$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

De $Ax = y$, en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient

$$x = A^{-1} y$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Plan

Ce qui suit nécessite de connaître la notion de déterminant d'une matrice...(à voir après le diapo Déterminant donc !).

Théorème

$detA \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible.
De plus si A est inversible alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$$

Ce qui suit nécessite de connaître la notion de déterminant d'une matrice...(à voir après le diapo Déterminant donc !).

Théorème

$detA \neq 0 \Leftrightarrow$ A est inversible.
De plus si A est inversible alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$$

Méthode des cofacteurs

Définition

On appelle matrice des cofacteurs, $C = com(A)$, la matrice de coefficients

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det A_{ij}$$

Théorème

si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^{t}(com(A)).$$

Méthode des cofacteurs

Définition

On appelle matrice des cofacteurs, $C = com(A)$, la matrice de coefficients

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det A_{ij}$$

Théorème

si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t(com(A)).$$

Méthode des cofacteurs

Définition

On appelle matrice des cofacteurs, $C = com(A)$, la matrice de coefficients

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}$$

Théorème

si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^{t}(com(A)).$$

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Bordeaux INP
ENSTBB

Méthode du pivot de Gauss-Jordan

On associe à la matrice A à inverser, la matrice I_n. On transforme A et I_n simultanément par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes, l'objectif final étant de transformer A en I_n. La transformée de I_n correspondante est l'inverse de A

Méthode du pivot de Gauss-Jordan

On associe à la matrice A à inverser, la matrice I_n. On transforme A et I_n simultanément par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes, l'objectif final étant de transformer A en I_n. La transformée de I_n correspondante est l'inverse de A

Méthode du pivot de Gauss-Jordan

On associe à la matrice A à inverser, la matrice I_n. On transforme A et I_n simultanément par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes, l'objectif final étant de transformer A en I_n. La transformée de I_n correspondante est l'inverse de A