Les nombres complexes

Objectifs :

Savoir utiliser les formes algébrique et trigonométrique et passer de l'une à l'autre

Racine nième d'un complexe

Résoudre des équations du second ordre à coefficients complexes

Introduction

- XIVème siècle : invention des nombres complexes représentant des racines carrées de réels négatifs.
- Ces nombres ont permis de résoudre toutes les équations du 2nd et 3ième degré
- Idée :i un nombre tel que $i^2=-1$

Alors $x^2=-4$ a pour solution 2i ou -2i

I-Définition et opérations dans C

- Définition: on appelle nombre complexe z tout couple ordonné de réels

$$z=(a,b)$$

Le nombre réel a est appelé partie réelle

Le nombre réel b partie imaginaire

Notation:

$z=a+ib$ est appelé la forme algébrique de z

- <u>Opérations dans $\mathbb{C}$</u>

Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$

- Addition

$z+z'=a+a'+i(b+b')$

- Multiplication

$zz'= (a+ib)(a'+ib')=aa'-bb'+i(ab'+a'b)$

Remarque:

$i=0+ix1$ et $i^2=-1+ix0=-1$

- Propriètè : Deux nombres sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire

$$a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a' \text{ et } b=b'$$

- Vocabulaire:

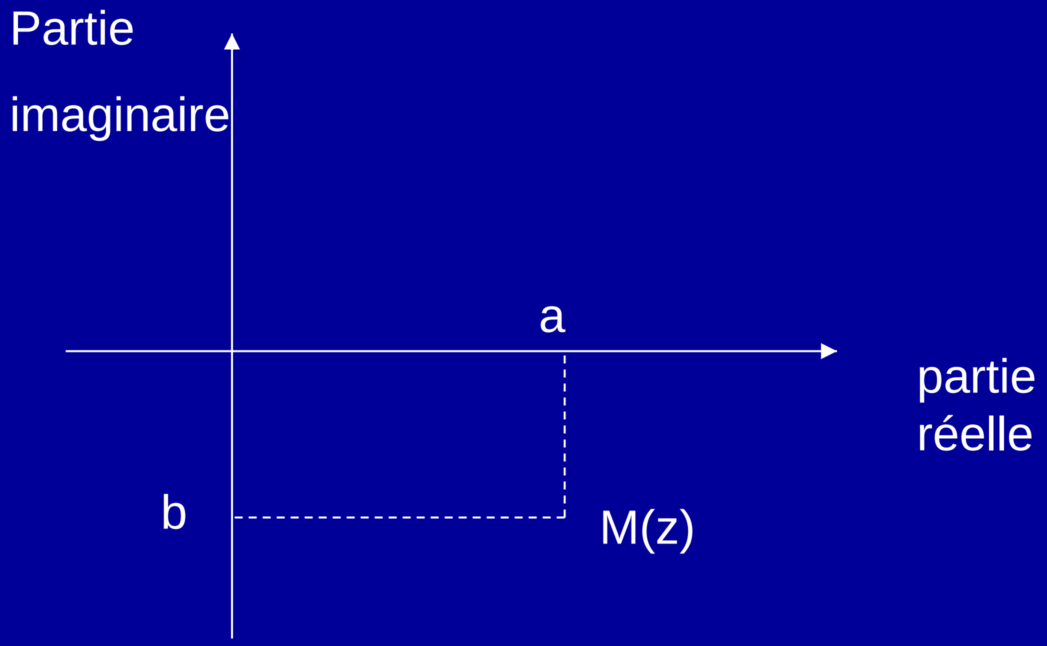
On appelle nombre complexe conjugué de $z=a+ib$, noté $\bar{z}$, le nombre complexe

$$\bar{z}=a-ib$$

II-Représentation des nombres complexes

- Géométrique

Soit le point M d’affixe z=a+ib



Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

où r est le module

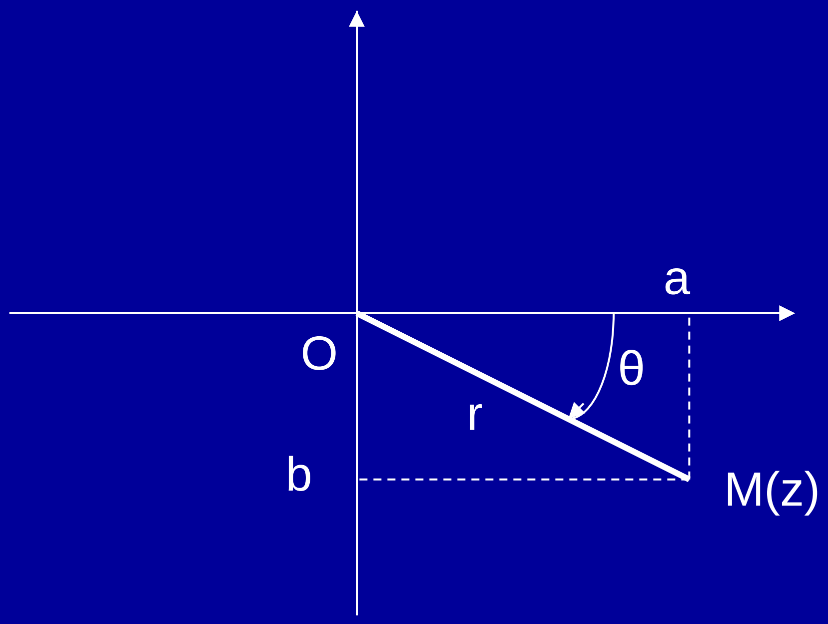
distance (positive) OM

Θ est l'argument

c'est-à-dire

La mesure (à $2k\pi$ près)

de l'angle (Ox,OM)

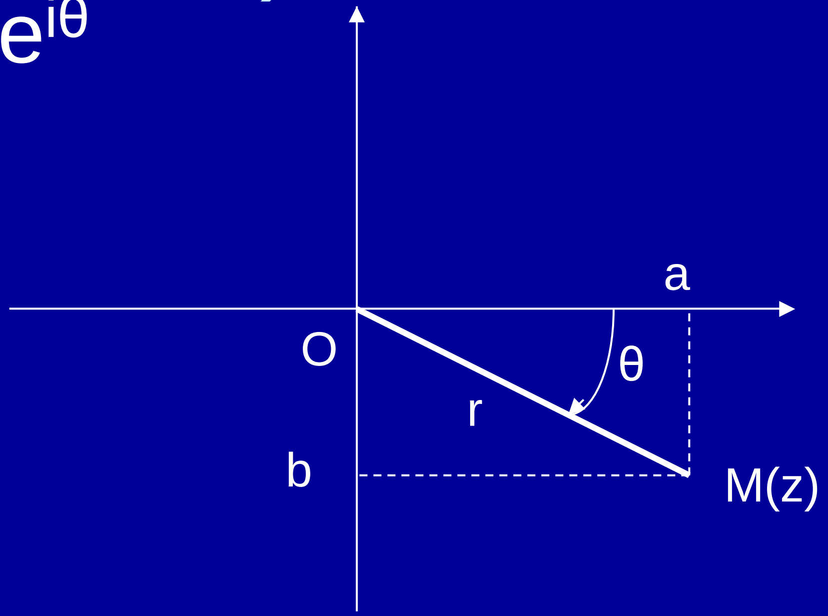


Relations entre forme algébrique et forme trigonométrique (ou exponentielle)

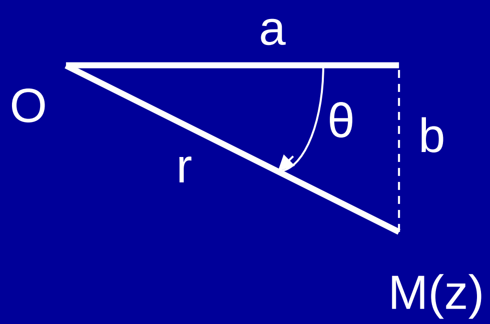
- $a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,e^{i\theta}$

$\Updownarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{(a^2+b^2)} \\ \\ \cos\theta=a/r \\ \\ \sin\theta=b/r \end{array}\right.$$



Rappel: théorème de Pythagore et cosinus, sinus dans le triangle rectangle



– Théorème de Pythagore

$$a^2+b^2=r^2$$

– cos(θ) = longueur du côté adjacent / longueur de l'hypoténuse = *a*/*r*.

– sin(θ) = longueur du côté opposé / longueur de l'hypoténuse = *b*/*r*.

– tan(θ) = longueur du côté opposé / longueur du côté adjacent = *b*/*a*.

Sinus et cosinus : valeurs remarquables

	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non defini

Calcul de l'argument à partir de la tangente:

Soit $z=a+ib$ non nul
Si $a>0$
Alors de $\tan(\theta)=b/a$, avec la calculatrice ou le tableau des valeurs remarquables, on tire

$$\Theta=\arctan(b/a) \qquad [2k\pi]$$

Si $a<0$
On a toujours $\tan(\theta)=b/a$ mais $\Theta\neq\arctan(b/a)$

$$\Theta=\arctan(b/a)+\pi \qquad [2k\pi]$$

Mais si on souhaite l'argument principal de z ($-\pi<z\leq \pi$), selon le signe de b,

Si $b> 0$

$$\Theta=\arctan(b/a)+\pi$$

Si $b<0$

$$\Theta=\arctan(b/a)-\pi$$

Formule de Moivre

Soit $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\ e^{i\theta}$

Alors $z^n=(r\ e^{i\theta})^n$

D'où $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$

Formule de Euler

$\cos\theta=(e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$

$\sin\theta=(e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$

III-Racines nièmes d'un complexe

- $z^n=Z$ (avec Z non nul)

Posons $z=r\,e^{i\theta}$ et $Z=\rho\,e^{i\varphi}$

$$z^n=Z \Leftrightarrow \begin{cases} r=\rho^{1/n} \\ \text{et} \\ \theta=\varphi/n+2k\pi/n \\ (\text{ k entier relatif}) \end{cases}$$

IV-Résolution des équations du second degré

- Théorème: Soit (E) l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ (a, b et c complexes donnés avec a non nul).

Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de l'équation

- Si $\Delta=0$ alors (E) admet une racine double

$$z=-b/(2a)$$

- Si $\Delta\neq 0$ alors (E) admet deux racines distinctes

$$z_1=(-b+\delta)/(2a) \text{ et } z_2=(-b-\delta)/(2a)$$

où $\delta^2= \Delta$