



Mathématiques et Modélisation

Cours de 2ème année

C. Nazaret

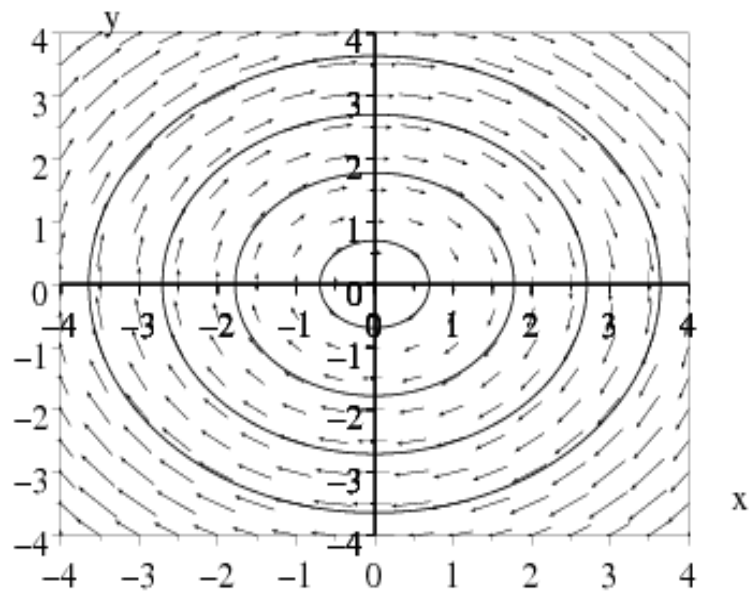


Table des matières

1	Transformation de Laplace	5
1.0.1	Introduction	5
1.1	Définitions et théorèmes	5
1.1.1	Définitions	5
1.1.2	Condition d'existence	6
1.1.3	Autres définitions utiles	7
1.1.4	Propriétés de la transformée de Laplace	7
1.2	Calcul de quelques transformées	8
1.2.1	Exemples : application des théorèmes	8
1.2.2	Table de quelques transformées	9
1.2.3	Transformée d'une fonction périodique	10
1.3	Transformée inverse	11
1.3.1	Méthode pratique	11
1.3.2	Méthode de calcul de la transformée inverse d'une fraction rationnelle	11
1.3.3	Une transformée de Laplace inverse particulière : la distribution de Dirac	12
1.4	Application à la résolution d'équations différentielles ou aux dérivées partielles	12
1.5	Fonction de transfert	14
2	Introduction [Pleaseinsertintopreamble] la modélisation de processus continus par [Pleaseinsertintopreamble]équations diff[Pleaseinsertintopreamble]rentielles	15
2.1	Un exemple simple : croissance de microorganismes	15
2.2	Modèle en génie des procédés : évolution de la concentration en oxygène dans un fermenteur	16
2.3	Modèle en microbiologie : croissance bactérienne dans un chemostat	16
3	Ajustement d'un modèle à des données expérimentales - curve fitting	19
3.1	Introduction	19
3.2	Critère des moindres carrés : cas linéaire	19
3.2.1	Etude de la droite	19
3.2.2	Généralisation	20
3.3	Critère des moindres carrés : cas non linéaire	22
3.3.1	Linéarisation de problèmes non linéaires	22
3.3.2	Recherche d'une solution aux problèmes non linéaires	23
3.3.3	Méthode de Newton	23
3.3.4	Autres méthodes itératives	24
3.3.5	Le point de vue du statisticien	25
4	Modélisation par ED de phénomènes biologiques à une espèce	27
4.1	Introduction	27
4.1.1	Un exemple simple	27
4.1.2	Terminologie : EDO, ordre, équation linéaire ou non linéaire.	28
4.2	Etude mathématique des EDO du 1er ordre	28
4.2.1	Définitions	28
4.2.2	Existence et unicité	29

4.2.3	Point stationnaire	30
4.2.4	Etude géométrique	31
4.2.5	Intervalle maximal	31
4.2.6	Positivité - Théorème de comparaison - Régions invariantes	32
4.3	La modélisation mathématique	33
4.4	Méthodes de résolution explicites de quelques équations	35
4.4.1	Equations du premier ordre	35
4.4.2	Equations du second ordre à coefficients constants	37
5	Simulation numérique des ED	39
5.1	Méthode d'Euler	39
5.1.1	L'équation logistique avec la méthode d'Euler	39
5.2	Concepts de base de l'approximation numérique	40
5.2.1	Convergence et stabilité	40
5.2.2	Méthodes explicites, implicites, à pas multiples	40
5.3	Quelques méthodes numériques	40
5.3.1	Exemples	40
5.3.2	Méthodes de Runge-Kutta	41
6	Modélisation par SD de phénomènes biologiques à plusieurs espèces	43
6.1	Introduction : deux exemples	43
6.2	Cas particulier : système linéaire	44
6.2.1	Recherche des solutions en dimension 2	44
6.2.2	Point stationnaire et stabilité	46
6.3	Représentation des solutions	47
6.4	Système différentiel non linéaire	49
6.4.1	Définitions	49
6.4.2	Existence et unicité	51
6.4.3	Point stationnaire	51
6.5	Etude de quelques modèles	52
6.5.1	Modèles en dynamique des populations	52
6.5.2	Modèles en cinétique enzymatique	55
6.5.3	Modèle de croissance en microbiologie dans un chemostat	56

Chapitre 1

Transformation de Laplace

1.0.1 Introduction

En mathématiques, il existe de nombreuses transformations intégrales d'une fonction parmi lesquelles nous avons vu la transformation de Fourier. Une autre transformation extrêmement utilisée est celle de Laplace.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \exp(-pt)f(t)dt.$$

Les transformations de Laplace (TL) et de Fourier (TF) présentent de nombreuses similitudes mais leur usage est différent. Dans la pratique, on utilise souvent la TL pour les fonctions dépendant du temps t ce qui permet de considérer le phénomène à partir du temps $t = 0$ (alors qu'avec la TF, le phénomène doit exister depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = +\infty$). De plus, les quantités dépendant du temps augmentent parfois avec t . Or la TF ne peut pas être appliquée aux fonctions qui tendent vers l'infini en l'infini, alors que la TL existera pour la plupart des fonctions usuelles. (La TF s'applique davantage à des fonctions dépendant de l'espace car ces quantités sont plus localisées ou au moins s'atténuent d'où l'intégrabilité sur $] -\infty; +\infty[$). D'autre part, il est difficile d'intégrer les conditions initiales dans les TF alors qu'elles s'introduisent naturellement dans les TL.

La TL permet de résoudre des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles en les transformant en équations algébriques ou équations différentielles plus simples. Dans un premier temps, nous donnerons quelques définitions et des conditions suffisantes d'existence des TL. Ensuite, nous énoncerons différents théorèmes très utiles pour le calcul des transformées. Puis nous donnons une méthode pour retrouver une fonction lorsqu'on connaît sa transformée, et une table des transformées usuelles. Nous terminons enfin par la résolution de quelques équations différentielles ou aux dérivées partielles.

1.1 Définitions et théorèmes

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 Une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) est dite causale si $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

Définition 1.1.2 On appelle transformation de Laplace d'une fonction causale f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), une application qui fait correspondre à $f(t)$ une fonction $F(p) = L(f)(p)$ définie par l'intégrale suivante, si elle existe,

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \exp(-pt)f(t)dt.$$

Dans ce qui suit, nous supposons que f est une fonction causale et nous noterons F ou $L(f)$ la transformée d'une fonction f lorsqu'elle existe.

Exemple 1.1.1 Quelques transformées

1. $\forall t \in \mathbb{R}^+ f(t) = 1$

$$F(p) = L(f)(p) = \frac{1}{p} \text{ si } p > 0$$

La variable p est ici supposée réelle mais elle peut être complexe. Dans ce cas, la transformée de Laplace de f est définie pour $\text{Re}(p) > 0$.

$$2. \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f(t) = t$$

$$F(p) = L(f)(p) = \frac{1}{p^2} \quad \text{si } p > 0$$

1.1.2 Condition d'existence

Définition 1.1.3 On dit qu'une fonction f est sectionnellement continue sur un intervalle $[a, b]$, si on peut diviser cet intervalle en un nombre fini d'intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ où f est continue et où $\lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} f(t)$ existent.

Définition 1.1.4 On dit qu'une fonction f est d'ordre exponentiel quand t tend vers $+\infty$, s'il existe des constantes M, b et t_0 telles que

$$|f(t)| \leq M \exp(bt) \quad \forall t > t_0$$

Dans un langage imagé, on peut exprimer cette propriété en disant que la fonction ne tend jamais vers ∞ plus rapidement qu'une exponentielle $e^{\alpha t}$ avec une valeur déterminée de α .

Remarque 1.1.1 1. On recherche la plus petite valeur de b .

2. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-bt) |f(t)|$ existe alors $f(t)$ est de l'ordre $\exp(bt)$.

Exemple 1.1.2 1. La fonction

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est d'ordre exponentiel. En effet, prenons $M = 1, t_0 = 0$ et $b = 0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-0t) |f(t)| = 1.$$

Mais b ne peut être négatif, car

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-bt) |f(t)| = +\infty.$$

2. $f(t) = t^n$ est d'ordre exponentiel dès que $b > 0$.

3. $\sin at$ et $\cos at$ sont d'ordre exponentiel ($b = 0$).

Théorème 1.1.1 Si f est sectionnellement continue sur tout intervalle $[0, a]$ et est d'ordre exponentiel $\exp(bt)$ quand t tend vers $+\infty$, alors la transformée de Laplace $L(f)(p)$ existe pour $p > b$.

Exemple 1.1.3 Soit $f(t) = \cos(\omega t)$. D'après le théorème 1.1.1, cette fonction admet une transformée de Laplace pour $p > 0$. Par définition, on a

$$L(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} \exp(-pt) \cos(\omega t) dt.$$

et en intégrant deux fois par parties, on obtient

$$L(f(t))(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad \text{pour } p > 0.$$

Remarque 1.1.2 1. Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de TL (Transformée de Laplace). Par exemple, $f(t) = e^{t^2}$. Pour prouver que f n'admet pas de TL, il faut montrer que $I = \int_0^{+\infty} \exp(-pt) f(t) dt$ diverge : pour t suffisamment grand, on a $0 < t < e^{t^2 - pt}$. Alors comme $\int_0^{+\infty} t dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{t^2 - pt} dt$ sont de même nature, notre intégrale I diverge.

2. Dans le théorème 1.1.1, il s'agit de conditions suffisantes et non nécessaires. Par exemple, $t^{-1/2}$ n'est pas sectionnellement continue sur $[0, a]$ (car $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1/2} = +\infty$) mais cependant

$$L(t^{-1/2}) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \text{pour } p > 0.$$

Il existe aussi des fonctions qui ne sont pas d'ordre exponentiel mais qui admettent une TL.

1.1.3 Autres définitions utiles

Définition 1.1.5 *Fonction d'Heaviside (étagée unitaire, échelon unitaire,...)*

On définit $u(t)$ par

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction permet de translater aisément le graphe d'une fonction. Elle est donc très utile pour exprimer par une seule relation une fonction définie par morceaux.

Exemple 1.1.4

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

En utilisant la fonction u , on peut écrire

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f(t) = tu(t) - (2-t)u(t-1) - 2u(t-2).$$

Définition 1.1.6 *Produit de convolution*

On définit le produit de convolution de deux fonctions f et g , lorsqu'il existe, de la façon suivante

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

De plus, on a

$$(f * g)(t) = (g * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(t-x)dx.$$

1.1.4 Propriétés de la transformée de Laplace

Remarque 1.1.3 L est un opérateur linéaire c'est-à-dire si $L(f)$ et $L(g)$ existent alors

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g).$$

Théorème 1.1.2 *Transformée de dérivées*

Si $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ sont continues pour $t \geq 0$, sont d'ordre exponentiel $\exp(bt)$ (où $b \in \mathbf{R}$) quand t tend vers $+\infty$ et si $f^{(n)}$ est sectionnellement continue sur tout intervalle $[0, c]$ (où $c \in \mathbf{R}^+$) et est d'ordre exponentiel $\exp(bt)$ quand t tend vers $+\infty$, alors $L(f^{(n)})(p)$ existe pour $p > b$ et on a :

$$L(f^{(n)})(p) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

En particulier pour $n = 1$,

$$L(f')(p) = pF(p) - f(0).$$

Théorème 1.1.3 Si f et g vérifient les hypothèses du théorème 1.1.1, alors pour $p > b$ (sauf mention contraire). Soient a et c des réels.

1. Transformée d'intégrale

$$L\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \frac{1}{p}F(p) \quad \text{pour } p > \max\{0, b\}$$

2. Dérivée de transformée

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = L(t^n f(t)).$$

3. Intégration de transformée

$$\int_p^{+\infty} F(x)dx = L\left(\frac{f(t)}{t}\right) \quad \text{si } f \text{ est nulle en } 0.$$

4. Théorème de la translation

$$F(p - a) = L(\exp(at)f(t)) \quad \text{pour } p > a + b.$$

5. Théorème du retard

$$L(u(t - c)f(t - c)) = \exp(-cp)F(p) \quad \text{avec } c \geq 0.$$

6. Produit de convolution

$$L(uf * ug)(t)(p) = F(p)G(p)$$

7. Théorème de la valeur finale et de la valeur initiale

$$\text{Si elles existent } \begin{cases} \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \end{cases}$$

1.2 Calcul de quelques transformées

1.2.1 Exemples : application des théorèmes

Exemple 1.2.1 Soient $a > 0$ et $\omega \neq 0$. Trouver $L(\exp(-at) \sin \omega t)(p)$.

D'après le théorème 1.1.1, cette fonction admet une transformée pour $p > -a$.

$$L(\sin \omega t)(p) = -\frac{1}{\omega} L\left(\frac{d}{dt} \cos \omega t\right)(p).$$

D'après le théorème 1.1.2, on a

$$L(\sin \omega t)(p) = -\frac{p}{\omega} L(\cos \omega t)(p) + \frac{1}{\omega}.$$

or $L(\cos \omega t)(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ pour $p > 0$, on obtient donc

$$L(\sin \omega t)(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{pour } p > 0,$$

puis en appliquant le théorème 1.1.3 (translation),

$$L(\exp(-at) \sin \omega t)(p) = \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2} \quad \text{pour } p > -a.$$

Exemple 1.2.2 Trouver $L(f(t))$ avec $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ 4 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$

soit par calcul direct

$$L(f(t))(p) = \int_0^1 \exp(-pt)t^2 dt + \int_1^3 \exp(-pt)2t dt + \int_3^{+\infty} 4 \exp(-pt) dt.$$

soit en utilisant la fonction de Heaviside

$$f(t) = t^2 + (2t - t^2)u(t - 1) + (4 - 2t)u(t - 3) \quad \forall t \in \mathbf{R}^+,$$

ce qui peut s'écrire

$$f(t) = t^2 - u(t - 1)((t - 1)^2 - 1) - 2u(t - 3)(t - 3 + 1),$$

en appliquant le théorème 1.1.3 (retard), on obtient

$$L(f(t))(p) = \frac{2}{p^3} + \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^3}\right) \exp(-p) - 2\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right) \exp(-3p) \quad \text{pour } p > 0.$$

Exemple 1.2.3 Trouver $L(t \sin t)(p)$ et en déduire une fonction f qui admet $\frac{2}{(p^2+1)^2}$ comme transformée de Laplace.

On applique le théorème 1.1.3 (dérivée de transformée)

$$\begin{aligned} L(t \sin t)(p) &= -\frac{d}{dp} L(\sin t)(p) \\ &= \frac{2p}{(p^2+1)^2} \text{ pour } p > 0. \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{2}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p} L(t \sin t)$. Par conséquent, d'après le théorème 1.1.3 (transformée d'intégrale), on a

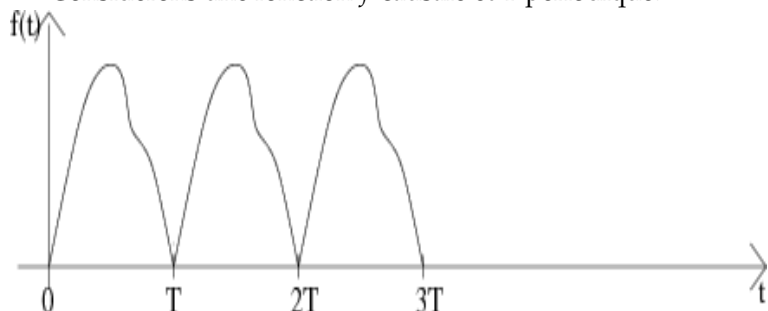
$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t x \sin x dx \\ &= \sin t - t \cos t. \end{aligned}$$

1.2.2 Table de quelques transformées

fonction causale	transformée	conditions
1	$\frac{1}{p}$	$p > 0$
δ_0	1	
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$p > 0$
$(\Pi t)^{-1/2}$	$p^{-1/2}$	$p > 0$
$\exp(at)$	$\frac{1}{p-a}$	$p > a$
$\frac{t^n \exp(at)}{n!}$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$	$p > a$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$p > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$p > 0$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$p > 0$
$\frac{\sin(\omega t)}{t}$	$\arctan \frac{\omega}{p}$	$p > 0$
$\sin^2(\omega t)$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2 + (2\omega)^2)}$	$p > 0$
$\cos^2(\omega t)$	$\frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + (2\omega)^2)}$	$p > 0$
$\frac{\sin^2(\omega t)}{t}$	$\frac{1}{4} \ln\left(1 + \frac{(2\omega)^2}{p^2}\right)$	$p > 0$
$\frac{\exp(bt) - \exp(at)}{t}$	$\ln\left(\frac{p-a}{p-b}\right)$	$p > \max(a, b)$
$\frac{\cos(bt) - \cos(at)}{t}$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{p^2 + a^2}{p^2 + b^2}\right)$	$p > 0$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$p > \omega$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$p > \omega$

1.2.3 Transformée d'une fonction périodique

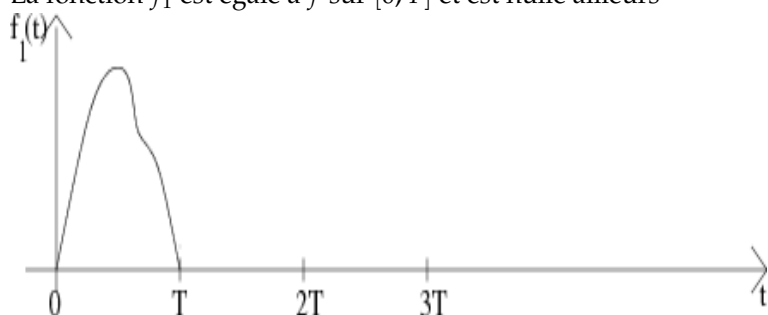
Considérons une fonction f causale et T -périodique.



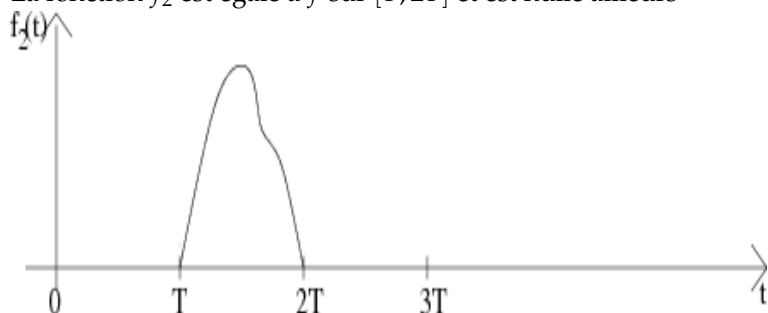
La fonction f peut être vue comme la somme infinie de fonctions définies chacune sur une période :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$$

La fonction f_1 est égale à f sur $[0; T]$ et est nulle ailleurs



La fonction f_2 est égale à f sur $[T; 2T]$ et est nulle ailleurs



De plus f_2 peut s'écrire en fonction de f_1 :

$$f_2(t) = f_1(t - T) = u(t - T)f_1(t - T).$$

De même pour f_k , $k \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $f_k(t) = f_1(t - kT) = u(t - kT)f_1(t - kT)$. Par conséquent, on a pour f :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(t - kT)f_1(t - kT).$$

Si on connaît la transformée F_1 de f_1 , on peut écrire

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-kTp)F_1(p).$$

D'autre part, comme $\exp(-kTp) < 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-kTp) = \frac{1}{1 - \exp(-kTp)}.$$

Par conséquent, on obtient

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - \exp(-kTp)}.$$

1.3 Transformée inverse

La transformée de Laplace permet de transformer une équation différentielle en une équation algébrique ordinaire. La solution de l'équation algébrique permet d'obtenir la transformée de la solution de l'équation différentielle de départ. Il faut donc aussi avoir une méthode pour retrouver $f(t)$ lorsqu'on connaît sa transformée $F(p)$. Si $L(f)(p) = F(p)$, on dit que $f(t)$ est la transformée inverse de $F(p)$.

Remarque 1.3.1 Une transformée inverse, si elle existe, n'est pas unique. En effet deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont même transformée. Si $F(p) = G(p)$ alors leurs inverses f et g sont égales sauf en leurs points de discontinuité. On notera tout de même $L^{-1}(F) = f$.

1.3.1 Méthode pratique

Pour déterminer la transformée inverse d'une fonction nous pourrions utiliser différentes propriétés :
— la linéarité de l'opérateur inverse c'est-à-dire

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, L^{-1}(\alpha F + \beta G) = \alpha L^{-1}(F) + \beta L^{-1}(G).$$

(si $L^{-1}(F)$ et $L^{-1}(G)$ existent),

- la table des transformées,
- les théorèmes vus précédemment,
- la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle pour déterminer son inverse (voir section suivante).

Exemple 1.3.1 Soit $K(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p-3}$. On remarque que $K(p) = F(p) + 2G(p)$ avec $F(p) = \frac{1}{p-2}$ et $G(p) = \frac{2}{p-3}$. D'après la table des transformées $L^{-1}\left(\frac{1}{p-a}\right) = \exp(at)$, on déduit $f(t) = \exp 2t$ et $g(t) = \exp 3t$. Par conséquent $k(t) = \exp 2t + 2 \exp 3t$.

Exemple 1.3.2 Soit $K(p) = \frac{3}{(p-2)^2 + 3^2}$. On remarque que $K(p) = F(p-2)$ avec $F(p) = \frac{3}{p^2 + 3^2}$. Or la transformée inverse de F est connue (cf table) et c'est $f(t) = \cos 3t$. On utilise le théorème de la translation $L^{-1}(F(p-a)) = \exp at f(t)$. Par conséquent, on obtient $k(t) = \exp 2t \cos(3t)$.

1.3.2 Méthode de calcul de la transformée inverse d'une fraction rationnelle

Pour trouver la transformée inverse d'une fonction F fraction rationnelle, nous utiliserons la méthode suivante :

- Décomposition de la fonction F en éléments simples
- Détermination de l'inverse de chaque élément simple à l'aide de la table et des théorèmes.

Exemple 1.3.3 Trouver une fonction f qui admet $\frac{4p^2}{(p^2+1)^2(p^2-1)}$ (avec $p > 1$) pour transformée de Laplace. On décompose cette fonction en éléments simples

$$\frac{4p^2}{(p^2+1)^2(p^2-1)} = \frac{2}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1} - \frac{1/2}{p+1} + \frac{1/2}{p-1}.$$

Puis on détermine l'inverse de chaque élément simple

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} &= L(\exp(-t))(p) & \frac{1}{p-1} &= L(\exp(t))(p) \\ \frac{1}{p^2+1} &= L(\sin t)(p) & \frac{2}{(p^2+1)^2} &= L(\sin t - t \cos t)(p) \end{aligned}.$$

Ainsi, on obtient

$$f(t) = -t \cos t - \frac{1}{2} \exp(-t) + \frac{1}{2} \exp(t).$$

1.3.3 Une transformée de Laplace inverse particulière : la distribution de Dirac

Soit la fonction $v_a(t)$ définie par

$$v_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La transformée de Laplace de cette fonction est

$$L(v_a(t))(p) = \frac{1}{ap}(1 - \exp(-ap)).$$

Si a tend vers 0, la région rectangulaire délimitée par les axes et la fonction v_a reste d'aire constante égale à 1, c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} v_a(t) dt = 1,$$

la largeur tendant vers 0 mais la longueur croissant indéfiniment. De plus,

$$\lim_{a \rightarrow 0} L(v_a(t))(p) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-ap)}{ap} = 1.$$

A partir de cette idée, on définit une "fonction" limite notée δ_0 , appelée distribution de Dirac dont la transformée de Laplace est 1. Cette "fonction" permet de décrire l'effet de v_a lorsque a tend vers 0, cela correspond à la réaction d'un système à une impulsion de très courte durée. Elle a de plus la propriété suivante :

$$\delta_0 * g = g$$

En effet $L(\delta_0 * g) = L(\delta_0)L(g)$. On définit aussi δ_a la distribution telle que $L(\delta_a) = e^{-ap}$. On a alors la propriété suivante :

$$(\delta_a * g)(t) = g(t - a).$$

1.4 Application à la résolution d'équations différentielles ou aux dérivées partielles

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 4 \exp(3t) \\ x(0) = 4 \\ x'(0) = 9 \end{cases}$$

1ère méthode : En résolvant l'équation sans second membre, on obtient

$$x(t) = A \exp(t) + B \exp(2t)$$

ensuite on cherche une solution particulière :

$$x_p(t) = 2 \exp(3t).$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$x(t) = A \exp(t) + B \exp(2t) + 2 \exp(3t),$$

puis à l'aide des conditions initiales, on en déduit les valeurs des constantes $A = B = 1$.

2ème méthode : On suppose que x vérifie les hypothèses du théorème 1.1.2 pour $n = 2$. On pose $X(p) = L(x(t))(p)$. On prend la transformée de chaque membre de l'équation ($\exp(3t)$ admet une transformée pour $p > 3$)

$$p^2 X(p) - 4p - 9 - 3(pX(p) - 4) + 2X(p) = \frac{4}{p-3} \quad \text{avec } p > 3.$$

De là, on tire

$$X(p) = \frac{4}{(p-1)(p-2)(p-3)} + \frac{4p-3}{(p-1)(p-2)} \quad \text{avec } p > 3,$$

que l'on décompose en éléments simples

$$X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p-3} \quad \text{avec } p > 3.$$

Puis à l'aide de la table, on obtient

$$x(t) = \exp(t) + \exp(2t) + 2 \exp(3t).$$

(et x vérifie bien les hypothèses du théorème 1.1.2 pour $n = 2$).

Exemple 2 : La déformation d'une poutre par une charge vérifie l'équation différentielle :

$$Cy^{(4)}(x) = q(x)$$

où q désigne la charge, C est une constante physique (dépendant du matériau), avec $0 \leq x \leq 2l$ où $2l$ est la longueur de la poutre. Résoudre le problème suivant, qui correspond au cas où la poutre est encadrée à ses deux extrémités et subit une charge concentrée en son milieu :

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) = K\delta_l \\ y(0) = y(2l) = 0 \\ y'(0) = y'(2l) = 0 \end{cases}$$

On fait les mêmes hypothèses sur y que précédemment. Prenons la transformée de chaque membre de l'équation

$$p^4 Y(p) - Ap - B = Ke^{-lp}.$$

De là, on tire

$$Y(p) = \frac{A}{p^3} + \frac{B}{p^4} + K \frac{e^{-lp}}{p^4}.$$

On obtient

$$y(x) = u(x) \left(A \frac{x^2}{2} + B \frac{x^3}{6} \right) + Ku(x-l) \frac{(x-l)^3}{6}.$$

On détermine les valeurs de A et B en utilisant les conditions au bord en $x = 2l$. Pour $l < x \leq 2l$, on a :

$$y(x) = A \frac{x^2}{2} + B \frac{x^3}{6} + K \frac{(x-l)^3}{6}.$$

$$y'(x) = Ax + B \frac{x^2}{2} + K \frac{(x-l)^2}{2}.$$

Comme $y(2l) = y'(2l) = 0$, on obtient

$$A \frac{(2l)^2}{2} + B \frac{(2l)^3}{6} + K \frac{l^3}{6} = 0$$

$$A(2l) + B \frac{(2l)^2}{2} + K \frac{l^2}{2} = 0$$

On en déduit le système vérifié par A et B

$$\begin{cases} 2Bl + 3A = -\frac{lK}{4} \\ 2Bl + 2A = -\frac{lK}{2} \end{cases}$$

et finalement pour $0 \leq x \leq 2l$

$$y(x) = \frac{K}{6} \left(\frac{3}{4} lx^2 - \frac{1}{2} x^3 + (x-l)^3 u(x-l) \right)$$

(qui vérifie bien les hypothèses de départ.)

Exemple 3 : Résoudre l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 4y \\ y(0, t) = 0 \quad y(\pi, t) = 0 \quad y(x, 0) = 6 \sin x - 4 \sin 2x \end{cases}$$

En transformant l'équation, on obtient

$$pY(x, p) - 6 \sin x + 4 \sin 2x = \frac{d^2 Y(x, p)}{dx^2} - 4Y(x, p),$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{d^2}{dx^2} Y(x, p) - (p + 4)Y(x, p) = -6 \sin x + 4 \sin 2x.$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants par rapport à x . On trouve la solution Y_0 de l'équation sans second membre (3 cas selon le signe de $s + 4$)

$$\begin{aligned} \text{si } p + 4 > 0 \quad Y_0(x, p) &= A \exp(\sqrt{(p + 4)}x) + B \exp(-\sqrt{(p + 4)}x) \\ \text{si } p + 4 = 0 \quad Y_0(x, p) &= Ax + B \\ \text{si } p + 4 < 0 \quad Y_0(x, p) &= A \cos(\sqrt{-(p + 4)}x) + B \sin(\sqrt{-(p + 4)}x) \end{aligned}$$

puis une solution particulière Y_p :

$$Y_p(x, p) = \frac{6}{p + 5} \sin x - \frac{4}{p + 8} \sin 2x$$

la solution générale Y de l'équation étant la somme de deux. De plus, $L(y(0, t))(p) = Y(0, p) = 0$, et $L(y(\pi, t))(p) = Y(\pi, p) = 0$, d'où $A = B = 0$.

Par conséquent, on a

$$Y(x, p) = \frac{6}{p + 5} \sin x - \frac{4}{p + 8} \sin 2x.$$

En transformant, on obtient la solution cherchée

$$y(x, t) = 6 \exp(-5t) \sin x - 4 \exp(-8t) \sin 2x.$$

(qui admet bien une transformée de Laplace pour $p > -5$ et vérifie les hypothèses du théorème 1.1.2 pour $n = 2$).

1.5 Fonction de transfert

On dispose d'un système linéaire : en entrée, on a le signal $e(t)$ et en sortie le signal $s(t)$. On suppose que ces deux signaux admettent des transformées de Laplace notée $E(p)$ et $S(p)$.

Définition 1.5.1 La fonction de transfert du système est $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$.

Si la fonction de transfert H d'un système est connue et si le signal d'entrée $e(t)$ est connue, on peut déterminer aisément le signal de sortie $s(t)$ car $S(p) = H(p)E(p)$.

Définition 1.5.2 La réponse impulsionnelle d'un système est $h(t)$ l'original de $H(p)$.

C'est aussi la sortie $s(t)$ lorsqu'en entrée, le signal est un dirac, car $S(p) = H(p)L(\delta) = H(p)$.

Définition 1.5.3 La réponse indicielle d'un système est la sortie $s(t)$ lorsque $e(t) = u(t)$ (fonction de heaviside).

On a alors $S(p) = H(p)\frac{1}{p}$. D'après le théorème transformée d'intégrale, on a

$$s(t) = \int_0^t h(x) dx.$$

La réponse impulsionnelle est donc la dérivée de la réponse indicielle.

Chapitre 2

Introduction à la modélisation de processus continus par équations différentielles

La modélisation est devenue une étape importante de la recherche en biologie et peut aider dans la démarche expérimentale. Dans ce chapitre, nous introduisons quelques modèles mathématiques par équations différentielles de processus biologiques continus (il existe d'autres types de modélisation : modèles discrets ou stochastiques,...) que nous utiliserons et étudierons par la suite.

On modélise l'évolution de populations à l'aide d'équations mathématiques en faisant l'hypothèse que l'on a une répartition spatiale homogène des populations : on utilisera donc des équations différentielles pour cette modélisation (si la répartition n'est pas homogène, on peut utiliser des équations aux dérivées partielles). Les deux derniers exemples présentés ici sont tirés du génie des procédés et de la microbiologie. L'avant dernier très simple consiste en une modélisation par une équation différentielle, le dernier plus complexe par un système d'équations différentielles.

Dans le chapitre qui suit, nous apprendrons à déterminer les "meilleures" valeurs des paramètres présents dans les modèles (K_{la} , $Y_{x/s}$,...) pour que les modèles représentent au mieux des données expérimentales ("curve fitting"). Puis dans les chapitres suivants, nous étudierons les propriétés de ces modèles d'équations différentielles.

"Les modèles ne sont que des mensonges qui nous permettent d'appréhender la réalité"

2.1 Un exemple simple : croissance de microorganismes

Si on veut modéliser la croissance dans des conditions non limitantes d'une population de bactéries, on peut faire l'hypothèse suivante : si $N(t)$ est la concentration en bactéries à l'instant t , et a leur taux de croissance, on peut supposer que la variation de $N(t)$ pendant un intervalle de temps δt s'écrit :

$$N(t + \delta t) = N(t) + a\delta t N(t),$$

$a\delta t$ est une sorte de probabilité de reproduction par bactérie pendant le temps δt . En considérant que l'intervalle de temps δt est petit, on obtient alors l'équation différentielle

$$N'(t) = aN(t).$$

Si N_0 est la valeur de N à l'instant $t = 0$ (la condition initiale), on peut alors décrire le comportement global de la population : c'est la croissance exponentielle bien connue $N(t) = N_0 e^{at}$.

C'est un modèle simple de croissance bactérienne (utilisé par Malthus en 1798 pour la population humaine). Nous verrons qu'il est possible à partir de ce modèle de dériver d'autres modèles en faisant des hypothèses différentes sur le taux de croissance a par exemple (voir le chapitre sur les EDO pour plus de détails).

2.2 Modèle en génie des procédés : évolution de la concentration en oxygène dans un fermenteur

En génie des procédés, on peut modéliser l'évolution de la concentration d'oxygène dans un fermenteur par une équation différentielle. Dans le cas le plus simple, en l'absence de microorganismes, la concentration en oxygène dissous, $C_{O_2}^{th}$, dans un fermenteur est modélisée par l'équation

$$\frac{dC_{O_2}^{th}}{dt} = K_{la}(C_{O_2}^* - C_{O_2}^{th})$$

où K_{la} est le coefficient de transfert (gaz-liquide) de l'oxygène, $C_{O_2}^*$ la concentration saturante d'oxygène liquide à 30°C, On suppose que K_{la} , $C_{O_2}^*$ strictement positives. On suppose que $C_{O_2}^*$ est connue. On pourra chercher à déterminer le paramètre K_{la} qui représente au mieux des données expérimentales.

On peut aussi modéliser la concentration en oxygène dissous, $C_{O_2}^{th}$, dans un fermenteur en régime transitoire à l'aide de l'équation

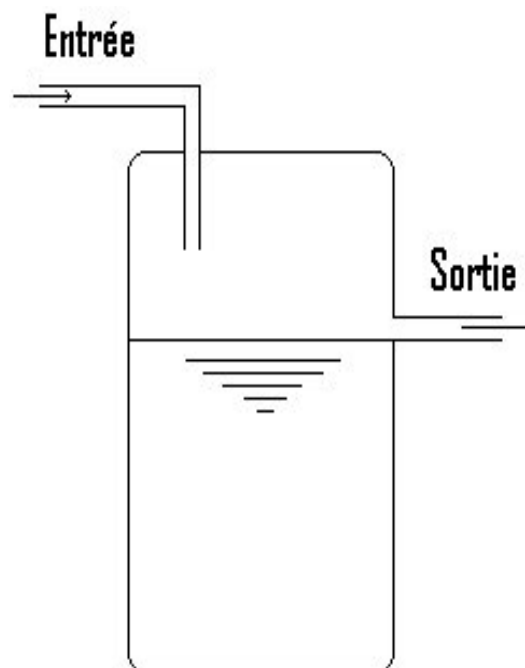
$$\frac{dC_{O_2}^{th}}{dt} = K_{la}(C_{O_2}^* - C_{O_2}^{th}) - Q_{O_2}X$$

où X la concentration bactérienne du milieu, et Q_{O_2} la vitesse spécifique de respiration des bactéries. On peut alors chercher à déterminer les paramètres K_{la} et $Q_{O_2}X$ qui représentent au mieux des données expérimentales.

2.3 Modèle en microbiologie : croissance bactérienne dans un chemostat

Dans cette section, nous présentons un modèle plus élaboré de croissance bactérienne dans un chemostat. Il s'agit d'un système d'équations différentielles.

Un chemostat est un appareil de laboratoire dans lequel se développent, de façon contrôlée, des organismes (bactéries, phytoplancton). On peut schématiser un chemostat de la façon suivante :



On place dans la chambre du chemostat les organismes (appelés biomasse) dont on veut étudier la croissance alimenté par des nutriments (appelés substrat). On note x la concentration de biomasse dans la chambre, s celle du substrat, V le volume contenu dans la chambre du fermenteur, F_{in} le flux entrant et F_{ex} le flux sortant. On a $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex}$. Ces organismes sont alimentés par l'entrée dans le système de

nutriment, à une concentration s_{in} . Un modèle mathématique classique de croissance des bactéries dans le chemostat est le suivant

$$\begin{cases} \frac{d(xV)}{dt} = \mu xV - F_{ex}x \\ \frac{d(sV)}{dt} = F_{in}s_{in} - F_{ex}s - \frac{\mu}{Y_{x/s}}xV \end{cases}$$

où μ est la taux de croissance de la biomasse, $Y_{x/s}$ le rendement. Il existe trois modes de fonctionnement de l'appareil

1. En "batch" : ici, l'entrée et la sortie sont nulles $F_{in} = F_{ex} = 0$ donc $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex} = 0$ et V est alors constant. Comme $\frac{d(xV)}{dt} = x \frac{dV}{dt} + \frac{dx}{dt}V = \frac{dx}{dt}V$, en divisant par V , le modèle devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x & x(t_f) = x_m \\ \frac{ds}{dt} = -\frac{\mu}{Y_{x/s}}x & s(t_f) = 0 \end{cases}$$

On obtient que $\frac{dx}{dt} + Y_{x/s} \frac{ds}{dt} = 0$. Si on suppose $Y_{x/s}$ constant, en intégrant, on tire que

$$x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_m$$

Le système se réduit alors à une EDO et une équation algébrique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x \\ x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_m \end{cases}$$

Pour déterminer le paramètre $Y_{x/s}$, il suffit de tracer x en fonction de s , puis de faire de la regression linéaire.

D'autre part, en faisant différentes hypothèses pour μ (constante ou fonction ...), cela conduit à différents modèles que nous étudierons. Par exemple, si μ est une fonction de croissance, dite de Michaëlis-Menten $\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{k_s + s}$, (μ_{max} taux maximal de croissance, et k_s constante de demi saturation), on obtient le modèle dit de Monod.

2. En "fed batch" : seule la sortie est nulle $F_{ex} = 0$ et $\frac{dV}{dt} = F_{in}$. Le volume n'est alors plus constant. C'est le mode de fonctionnement préféré lorsque l'objectif est le contrôle de la population. Le système différentiel (en divisant par V) devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x \frac{F_{in}}{V} = \mu x \\ \frac{ds}{dt} + s \frac{F_{in}}{V} = \frac{F_{in}}{V} s_{in} - \frac{\mu}{Y_{x/s}}x \end{cases}$$

soit en définissant la dilution D par $D = \frac{F_{in}}{V}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\mu - D)x \\ \frac{ds}{dt} = D(s_{in} - s) - \frac{\mu}{Y_{x/s}}x \end{cases}$$

Nous étudierons les propriétés de ce modèle en fonction des différents paramètres. On s'intéressera en particulier aux conditions à fixer sur les paramètres si l'on cherche à maintenir s constant.

3. En continu : le débit de la sortie est égal au débit de l'entrée $F_{in} = F_{ex}$. Le volume est donc constant dans la chambre car $\frac{dV}{dt} = 0$. Le modèle dans le chemostat en continu devient donc

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\mu - D)x \\ \frac{ds}{dt} = D(s_{in} - s) - \frac{\mu}{Y_{x/s}}x \end{cases}$$

Dans le cas du chemostat, c'est le troisième type de fonctionnement (en continu) qui est privilégié. Ainsi, le mélange bactéries-nutriment est chassé du chemostat au même taux D que l'entrée.

Chapitre 3

Ajustement d'un modèle à des données expérimentales - curve fitting

3.1 Introduction

On dispose d'une série de n mesures $\{(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n\}$ obtenue en observant une variable y en fonction d'une variable x . On dispose aussi d'un modèle de relation entre x et y suggéré par les données ou établi à partir de considérations théoriques.

Ce modèle dépend de paramètres a_1, a_2, \dots, a_p . Le problème consiste à déterminer des valeurs des paramètres a_1, a_2, \dots, a_p à partir des données expérimentales telles que le graphe de la fonction $f(x, a_1, a_2, \dots, a_p)$ approche "au mieux" les points (x_i, y_i) correspondants aux données.

3.2 Critère des moindres carrés : cas linéaire

3.2.1 Etude de la droite

On suppose que la liaison entre y et x est une droite. On cherche donc l'équation de la droite qui passe "au mieux" entre les points expérimentaux. Un critère pour approcher "au mieux" les points (x_i, y_i) est le critère des moindres carrés. Il consiste à minimiser la distance entre le point expérimental (x_i, y_i) et le point (x_i, y_i^*) obtenu à partir de x_i et de l'équation $y = a_1^* + a_2^*x$. Il s'agit de trouver (a_1^*, a_2^*) tels que $S = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2$ soit le plus petit possible. On cherche donc le minimum de la fonction $S(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_1 + a_2x_i))^2$ par rapport à a_i avec $i = 1, 2$. Pour cela on cherche les points critiques de cette fonction c'est-à-dire les points où les dérivées partielles s'annulent simultanément. Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}(a_1, a_2) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a_1 + a_2x_i))$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial a_2}(a_1, a_2) = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - (a_1 + a_2x_i)).$$

Les points critiques (a_1^*, a_2^*) vérifient $\frac{\partial S}{\partial a_1}(a_1^*, a_2^*) = 0$ et $\frac{\partial S}{\partial a_2}(a_1^*, a_2^*) = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - (a_1^* + a_2^*x_i)) = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i (y_i - (a_1^* + a_2^*x_i)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na_1^* + a_2^* \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_1^* \sum_{i=1}^n x_i + a_2^* \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2^* = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} \\ a_1^* = \bar{y} - a_2^* \bar{x} \end{cases}$$

De plus $S(a_1, a_2)$ étant strictement convexe, ce point critique (a_1^*, a_2^*) est bien un minimum pour S . Reprenons le système et écrivons-le sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

Remarquons que si l'on pose

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

alors ${}^tXX = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}$ et ${}^tXY = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$.

Sous forme matricielle, on a donc

$${}^tXX \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = {}^tXY.$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = ({}^tXX)^{-1} {}^tXY.$$

3.2.2 Généralisation

Le critère des moindres carrés ne s'applique pas uniquement au cas d'une droite. Dans tous les cas linéaires, on trouve une solution. Dans le cas linéaire cela signifie que l'on cherche un vecteur de paramètres $(a_1^*, a_2^*, \dots, a_p^*)$ tels que $y = \sum_{j=1}^p a_j^* f_j(x)$ où les f_j sont des fonctions données de x , seuls les paramètres a_j^* sont à estimer à partir des données expérimentales.

Exemple 3.2.1 1. cas linéaires :

$$y = a_1 + a_2x, y = a_1 + a_2x + a_3x^2, y = a_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x), y = a_1 \exp(x) + a_2 \exp(2x)$$

2. cas non linéaires :

$$y = a_1 \exp(-a_2x), y = \frac{a_3}{1 + a_1 \exp(-a_2x)}, y = \frac{a_1}{a_2 + x}$$

Selon le critère des moindres carrés, on cherche $(a_1^*, a_2^*, \dots, a_p^*)$ qui minimisent

$$S(a_1, a_2, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p a_j f_j(x_i) \right)^2.$$

Ce minimum est à rechercher parmi les points critiques de S c'est-à-dire les points qui annulent les dérivées partielles

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}(a_1^*, a_2^*, \dots, a_p^*) = 0 \quad k = 1, \dots, p.$$

Comme

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}(a_1, a_2, \dots, a_p) = -2 \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p a_j f_j(x_i) \right) f_k(x_i) \quad k = 1, \dots, p,$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^n y_i f_k(x_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_j^* f_j(x_i) f_k(x_i) \quad k = 1, \dots, p.$$

En posant

$$X = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_p(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_p(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_p(x_n) \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

on a

$${}^t_{XX} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_1(x_i) & \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_2(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_p(x_i) \\ \sum_{i=1}^n f_2(x_i)f_1(x_i) & \sum_{i=1}^n f_2(x_i)f_2(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n f_2(x_i)f_p(x_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^n f_p(x_i)f_1(x_i) & \sum_{i=1}^n f_p(x_i)f_2(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n f_p(x_i)f_p(x_i) \end{pmatrix} \quad {}^t_{XY} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_1(x_i)y_i \\ \sum_{i=1}^n f_2(x_i)y_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n f_p(x_i)y_i \end{pmatrix}.$$

Sous forme matricielle, on a donc

$${}^t_{XX} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \cdots \\ a_p^* \end{pmatrix} = {}^t_{XY}.$$

Exemple 3.2.2 On suppose que l'on dispose de n mesures (x_i, y_i) . On cherche un vecteur θ^* de paramètres $\theta^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ tels que la parabole $y = a_1^* + a_2^*x + a_3^*x^2$ passe au mieux parmi les n mesures (x_i, y_i) . On veut donc (a_1^*, a_2^*, a_3^*) tels que $y = \sum_{j=1}^3 a_j^* f_j(x)$ avec $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ et $f_3(x) = x^2$. Écrivons le problème sous forme matricielle

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad {}^t_{XX} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{pmatrix}.$$

Sous forme matricielle, on a donc

$${}^t_{XX} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix} = {}^t_{XY}.$$

Exemple 3.2.3 $y = a_1 \exp x + a_2 \exp 2x + a_3 \exp 3x$

$${}^t_{XX} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \exp 2x_i & \sum_{i=1}^n \exp 3x_i & \sum_{i=1}^n \exp 4x_i \\ \sum_{i=1}^n \exp 3x_i & \sum_{i=1}^n \exp 4x_i & \sum_{i=1}^n \exp 5x_i \\ \sum_{i=1}^n \exp 4x_i & \sum_{i=1}^n \exp 5x_i & \sum_{i=1}^n \exp 6x_i \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2.4 On dispose du tableau de mesures (x_i, y_i) suivant :

x_i	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y_i	2.3	0	-1.5	-0.6	1.7	3.1	1.7	-1.6	-4.2	-4

Un modèle de relation entre x et y suggéré est $y = a_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x)$. On veut déterminer (a_1^*, a_2^*) qui minimisent le critère des moindres carrés. En posant

$$X = \begin{pmatrix} \sin(x_1) & \cos(2x_1) \\ \sin(x_2) & \cos(2x_2) \\ \cdots & \cdots \\ \sin(x_n) & \cos(2x_n) \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Sous forme matricielle, on a donc ${}^t_{XX} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = {}^t_{XY}$. On obtient

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sin^2(x_i) & \sum_{i=1}^n \sin(x_i) \cos(2x_i) \\ \sum_{i=1}^n \sin(x_i) \cos(2x_i) & \sum_{i=1}^n \cos^2(2x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sin(x_i)y_i \\ \sum_{i=1}^n \cos(2x_i)y_i \end{pmatrix},$$

d'où le résultat (à 10^{-2} près)

$$\begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3.3 Critère des moindres carrés : cas non linéaire

Supposons que la relation liant x et y soit $y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_p)$. Le critère des moindres carrés est alors : $S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_p))^2$. Le minimum doit vérifier $\frac{\partial S}{\partial a_k}(a_1, a_2, \dots, a_p) = 0 \quad k = 1, \dots, p$. Or les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}(a_1, a_2, \dots, a_p) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_p)) \frac{\partial f}{\partial a_k}(x_i, a_1, a_2, \dots, a_p) \quad k = 1, \dots, p,$$

ce qui conduit à un système d'équations non linéaires dont en général on ne connaît pas de solution exacte. Cependant, certains problèmes non linéaires peuvent être transformés en un problème linéaire par un changement de variables.

3.3.1 Linéarisation de problèmes non linéaires

Exemple 3.3.1 *Modèle exponentiel*

Supposons que la relation théorique entre y et x soit $y = a_1 \exp a_2 x$ (2).

Posons $f(x, a_1, a_2) = a_1 \exp a_2 x$. On a $\frac{\partial f}{\partial a_1} = \exp a_2 x$ et $\frac{\partial f}{\partial a_2} = x a_1 \exp a_2 x$. On cherche les points critiques de $S(x, a_1, a_2)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 \exp a_2 x_i) \exp a_2 x_i \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 \exp a_2 x_i) x_i a_1 \exp a_2 x_i \end{cases}$$

Ceci conduit à un système non linéaire dont on ne connaît pas de solution exacte.

Cependant ce problème peut être transformé en un problème linéaire par un changement de variable. Posons $z = \ln(y)$, en prenant le logarithme de la relation (2), on obtient :

$$z = \ln(a_1) + a_2 x$$

qui est une relation linéaire.

Exemple 3.3.2 *L'évolution de la concentration d'oxygène dissous dans un fermenteur peut être modélisée par*

$$\frac{dC_{O_2}^{th}}{dt} = K_{la}(C_{O_2}^* - C_{O_2}^{th})$$

Pour déterminer le paramètre K_{la} , on peut effectuer le changement de variable $z = \ln(C_{O_2}^* - C_{O_2}^{th})$. Mais il est préférable de travailler sans effectuer cette transformation...

Exemple 3.3.3 *Modèle de Mickaelis-Menten-Henri*

$$v = \frac{V_M[S]}{K_M + [S]} \quad (1)$$

On veut déterminer V_M et K_M à partir de données expérimentales.

— Linéarisation de Lineweaver et Burk

En inversant les rapports de l'équation (1), on obtient

$$\frac{V_M}{v} = \frac{K_M + [S]}{[S]}.$$

En prenant comme nouvelles variables $Y = \frac{1}{v}$ et $X = \frac{1}{[S]}$, on obtient $Y = \frac{K_M}{V_M} X + \frac{1}{V_M}$ ainsi on se ramène à un problème linéaire (cas de la droite). Mais ce changement de variables n'est pas satisfaisant. En effet, il "accumule" près de l'origine les points correspondants aux concentrations élevées et donne une importance exagérée aux points obtenus correspondants à une concentration faible.

— Linéarisation d'Headie-Hofstee
L'équation (1) peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} v &= \frac{V_M(K_M + [S]) - V_M K_M}{K_M + [S]} \\ &= V_M - K_M \frac{V_M}{K_M + [S]} \\ &= V_M - K_M \frac{v}{[S]} \end{aligned}$$

En prenant comme nouvelles variables $Y = \frac{v}{[S]}$ et $X = v$, on obtient

$$Y = \frac{V_M - X}{K_M}.$$

— Linéarisation de Hanes-Woolf
L'équation (1) peut encore s'écrire

$$\frac{[S]}{v} = \frac{K_M + [S]}{V_M}.$$

En posant $X = [S]$ et $Y = \frac{[S]}{v}$, on obtient

$$Y = \frac{K_M}{V_M} + \frac{X}{V_M}.$$

Le problème de ces méthodes de changement de variables dans les systèmes non linéaires est que l'on ne minimise plus la quantité $S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_p))^2$ mais une quantité "transformée". Aussi ces méthodes qui ont été assez utilisées par le passé (lorsque l'on ne disposait pas d'autres outils) ne se justifient plus de nos jours. En effet grâce à la puissance des calculateurs et la mise au point de nombreuses méthodes de minimisation, on peut obtenir avec des logiciels de meilleurs résultats.

3.3.2 Recherche d'une solution aux problèmes non linéaires

Puisque l'on ne sait pas calculer la solution a^* de manière explicite, l'idée est de construire une suite qui tend vers a^* . Ce type de méthodes s'appelle méthodes itératives.

3.3.3 Méthode de Newton

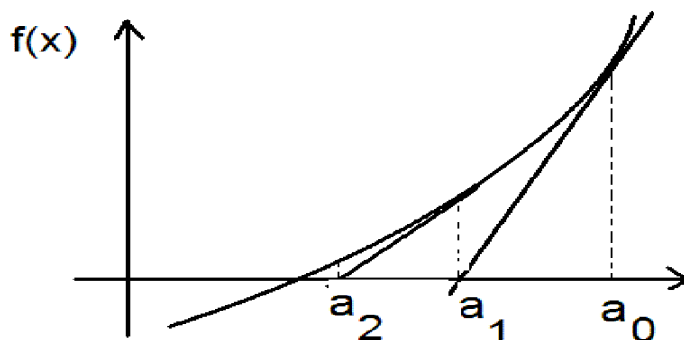
Commençons par la dimension 1.

1. Cas unidimensionnel

On cherche $a^* \in \mathbb{R}$ tel que $S'(a^*) = 0$ (points critiques de S fonction de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$). Posons $f = S'$. On cherche donc les zéros de f . Pour chercher $a^* \in \mathbb{R}$ tel que $f(a^*) = 0$, on va construire une suite $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ tendant vers a^* . On suppose que l'on connaît a^0 proche de a^* . On pose $a_0 = a^0$. Puis on écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 de f au voisinage de a_0 :

$$f(a) = f(a_0) + (a - a_0)f'(a_0) + (a - a_0)\epsilon(a - a_0).$$

L'idée est d'approcher f par sa tangente.



L'équation de la tangente en a_0 à la courbe représentative de f est $y = f(a_0) + (a - a_0)f'(a_0)$. On détermine alors le point d'intersection $(a_1, 0)$ de la tangente avec l'axe des abscisses : $f(a_0) + (a_1 - a_0)f'(a_0) = 0$ soit $a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$. Puis on réitère le processus en approchant f en a_1 par sa tangente et ainsi de suite. On construit ainsi

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}.$$

Pour que cela soit satisfaisant, il faut bien sûr que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{k+1} - a_k) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(a_k) = 0$, c'est-à-dire que la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers a^* .

2. Cas multidimensionnel

Le principe dans le cas multidimensionnel est le même. Dans ce qui suit, nous allons utiliser une suite d'éléments de \mathbb{R}^n . Pour ne pas confondre les indices de la suite et les indices de composantes, la suite sera notée θ_k . Mais θ_k représente un vecteur de paramètres. θ_k est un vecteur de n composantes $\theta_k = (\theta_{k1}, \theta_{k2}, \dots, \theta_{kn})$ mais ce sera aussi un élément d'une suite $\theta_0, \theta_1, \dots$ chaque élément étant un vecteur de \mathbb{R}^n .

On cherche les points critiques de S fonction de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ie $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $S'(\theta^*) = 0$. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 de S au voisinage de θ_0 :

$$S(\theta) = S(\theta_0) + \nabla S(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0) H_S(\theta_0) (\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0) \epsilon(\theta - \theta_0).$$

Si l'approximation est exacte, on a

$$S(\theta) = S(\theta_0) + \nabla S(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0) H_S(\theta_0) (\theta - \theta_0).$$

En dérivant cette expression, on obtient

$$\nabla S(\theta) = \nabla S(\theta_0) + H_S(\theta_0)(\theta - \theta_0)$$

Par conséquent $\nabla S(\theta)$ s'annule et f atteint un extremum pour une valeur de θ solution de

$$H_S(\theta_0)(\theta - \theta_0) = -\nabla S(\theta_0).$$

Si l'approximation n'est pas exacte, on construit une suite à partir d'un point θ_0 qui converge vers un minimum de S à partir de la formule

$$\theta_{k+1} = \theta_k - H_S^{-1}(\theta_k) \nabla S(\theta_k).$$

Remarque 3.3.1 Dans la pratique le calcul à chaque étape de l'inverse de la hessienne de S est coûteux. De plus cette méthode peut diverger. Aussi, on utilise plutôt des méthodes de quasi-Newton, de gradient ou de Levenberg-Marquardt.

3.3.4 Autres méthodes itératives

Direction de descente

Définition 3.3.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}$. On dit qu'un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente pour f au point $\theta \in \mathbb{R}^n$ si

$$\forall s > 0 \exists \alpha \in]0; s[\quad f(\theta + \alpha d) < f(\theta).$$

Théorème 3.3.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}$. Supposons f dérivable au point θ . Soit $d \in \mathbb{R}^n$. Si $\nabla f(\theta) \cdot d < 0$ alors d est une direction de descente pour f en θ .

Remarque 3.3.2 — Si θ^* est un minimum local alors il n'existe aucune direction de descente pour f en θ^* .
 — Réciproquement s'il n'existe aucune direction de descente pour f en θ^* alors θ^* est un point critique. Si de plus $H_f(\theta^*) \neq 0$ (point critique non dégénéré) alors θ^* est un minimum strict.
 — En un point critique dégénéré, il peut n'y avoir aucune direction de descente sans pour autant que ce point soit un minimum local (ex $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ n'admet aucune direction de descente en $(0, 0)$ bien que ce ne soit pas un minimum local).

Méthode de descente

On appelle méthode de descente une méthode générant une suite (θ_k)

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k d_k$$

où d_k est une direction de descente c'est-à-dire vérifiant $\nabla S(\theta_k) \cdot d_k < 0$ et où α_k est un réel appelé pas de descente. Les algorithmes des méthodes de descente se généralisent donc de la manière suivante

- initialisation : choix de θ_0
- étape k
 - détermination d'une direction de descente $d_k \in \mathbb{R}^n$
 - choix d'un pas de descente $\alpha_k \in \mathbb{R}$
 - $\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k d_k$
- Test d'arrêt : $k < k+1$ (et retourner à l'étape k) ou fin

Il existe deux grandes familles de stratégies de la direction de descente d_k au point θ_k :

- stratégie de Newton $d_k = -H_S^{-1}(\theta_k) \nabla S(\theta_k)$
- stratégie de Gradient $d_k = -\nabla S(\theta_k)$

Méthode de Gradient

Les méthodes dites de gradient consistent à déterminer d_k en fonction de $\nabla S(\theta_k)$ souvent $d_k = -\nabla S(\theta_k)$ direction opposée au gradient (la plus forte pente). On vérifie qu'il s'agit bien d'une direction de descente en effet $\nabla S(\theta_k) \cdot d_k = \nabla S(\theta_k) \cdot (-\nabla S(\theta_k)) = -\|\nabla S(\theta_k)\|^2 < 0$. D'après le théorème vu précédemment, il s'agit bien d'une direction de descente. Pour le pas de descente α_k , il existe diverses stratégies :

- soit fixe $\alpha_k = \text{constante}$
- soit prédéfini $\alpha_k = \frac{1}{k}$
- soit calculé en cherchant le minimum d'une fonction d'une variable, le réel α_k vérifiant $S(\theta_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} S(\theta_k + \alpha d_k)$

Méthode de Levenberg-Marquardt

Levenberg et Marquardt ont proposé une méthode pour passer du schéma avec inversion de la hessienne à celui des plus fortes pentes. Ce dernier est utilisé loin du minimum puis il est remplacé par le schéma d'inversion de la hessienne à mesure qu'on s'approche du minimum. Il existe aussi d'autres méthodes dérivant de Newton et du Gradient : quasi-newton, Gauss-Newton, gradient conjugué,...

Comparaison des différentes méthodes

- Les méthodes de Gradient sont des méthodes robustes : tant que l'algorithme n'a pas trouvé un point critique, la valeur du critère décroît strictement à chaque itération mais elles sont lentes. De plus l'algorithme peut rencontrer un certain nombre de problèmes de convergence si le minimum est "au fond d'une vallée étroite" : la suite peut osciller de part et d'autre de la vallée et progresse laborieusement (beaucoup d'itérations et pas de descente long à déterminer à chaque étape).
- Les méthodes de Newton peuvent diverger. En effet $d_k = -H_S^{-1}(\theta_k) \nabla S(\theta_k)$ est une direction de descente dès que la hessienne $H_S(\theta_k)$ est définie positive ce qui est toujours vérifiée si θ_k est suffisamment proche d'un minimum local (non dégénéré) de f . Lorsqu'ils convergent ces algorithmes de type Newton sont plus rapides que les algorithmes de Gradient mais plus coûteux (calcul de l'inverse de la hessienne) mais moins robustes (divergence possible). Loin du minimum d_k n'est plus nécessairement une direction de descente.

3.3.5 Le point de vue du statisticien

On sait maintenant obtenir des paramètres en minimisant le critère des moindres carrés. L'objectif du statisticien est de préciser la qualité de ces valeurs. Supposons qu'on ait répété la même expérience plusieurs fois. On obtient généralement un jeu de paramètres différents. Mais on espère que plus on

va faire de mesures plus ces paramètres vont tendre vers un jeu de paramètres "certains". La méthode dite du maximum de vraisemblance consiste à trouver les paramètres qui maximisent la probabilité d'un résultat observé partant du principe qu'un résultat peu probable n'est pas observé. La méthode du maximum de vraisemblance est identique à la méthode des moindres carrés dans certains cas ...

Chapitre 4

Modélisation par ED de phénomènes biologiques à une espèce

Certains phénomènes biologiques, physiques, chimiques, ... peuvent se modéliser par des relations entre une ou plusieurs variables (concentration, nombre d'individus, ...) évoluant en fonction du temps t . Aux variables sont associées des fonctions de t qui vérifieront des conditions provenant du phénomène étudié. Quand ces conditions portent sur les dérivées, on obtient une équation différentielle (ED) ou un système différentiel. Lorsque le modèle ne porte que sur une seule variable, on parle d'équation différentielle en dimension 1.

Malheureusement, nous ne savons pas résoudre la plupart des ED. Aussi, dans une première partie, nous énoncerons quelques résultats mathématiques fondamentaux relatifs aux ED. Ces théorèmes nous fourniront des renseignements intéressants sur le comportement des solutions sans avoir à résoudre l'ED. Ensuite, nous étudierons les premiers modèles mathématiques en évolution des populations, modèles basés sur des ED.

Puis nous donnons en fin de chapitre à titre de rappel quelques méthodes classiques de résolution d'ED lorsque celles-ci peuvent se ramener à des calculs de primitives.

4.1 Introduction

4.1.1 Un exemple simple

Rappelons le modèle dit de Malthus de croissance d'une population de bactéries dans des conditions non limitantes : Si $N(t)$ est la concentration en bactéries à l'instant t , et a leur taux de croissance, on peut supposer que la variation de $N(t)$ pendant un intervalle de temps δt s'écrit :

$$N(t + \delta t) = N(t) + a\delta t N(t),$$

$a\delta t$ est une sorte de probabilité de reproduction par bactérie pendant le temps δt . En considérant que l'intervalle de temps δt est petit, on obtient alors l'équation différentielle

$$N'(t) = aN(t).$$

Si N_0 est la valeur de N à l'instant $t = 0$ (la condition initiale), on peut alors décrire le comportement global de la population : c'est la croissance exponentielle $N(t) = N_0 e^{at}$.

C'est un modèle simple qui fut utilisé par Malthus en 1798 pour la population humaine (et qui fit sensation dans la communauté scientifique). Nous verrons qu'on peut complexifier ce modèle en faisant des hypothèses différentes ou en prenant en compte davantage d'aspects de la "réalité". Mais les modèles ainsi obtenus n'admettent pas tous une solution explicite. Aussi dans ce qui suit, nous allons étudier à travers des exemples biologiques, les équations différentielles. L'idée n'est pas de résoudre explicitement ces équations (cela est souvent impossible) mais de raisonner géométriquement pour obtenir des renseignements sur le comportement des solutions.

4.1.2 Terminologie : EDO, ordre, équation linéaire ou non linéaire.

Soit $y(t)$ une fonction dérivable inconnue de I dans \mathbf{R} où I est un intervalle de \mathbf{R} .

Définition 4.1.1 Une équation différentielle ordinaire, EDO, d'ordre 1 est une relation entre la variable t , la fonction y de la variable t et sa dérivée $y'(t)$.

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (4.1)$$

où f est une fonction continue d'un domaine U de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} .

Remarque 4.1.1 — Une équation différentielle d'ordre m est une relation entre la variable t , la fonction y de la variable t et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre m : $y'(t), y''(t), \dots, y^{(m)}(t)$

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \quad (4.2)$$

où f est une fonction continue d'un domaine U de $\mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} . Nous verrons au chapitre suivant comment on peut transformer ce type d'équation d'ordre m en un système d'équations différentielles d'ordre 1.

— Si la fonction f ne dépend pas de t , l'équation est dite autonome (Ex : $y' = y$).

— Equations linéaires/non linéaires

si f est linéaire par rapport à toutes les variables sauf t , alors l'ED est linéaire. Rappelons que $(t, y) \mapsto f(t, y)$ est linéaire par rapport à y si $\forall (y_a, y_b), f(t, y_a + y_b) = f(t, y_a) + f(t, y_b), \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall y, f(\lambda y) = \lambda f(y)$. Par exemple, l'EDO $y' + y = 4$ est linéaire mais $y' + y^2 = 4$ ne l'est pas.

4.2 Etude mathématique des EDO du 1er ordre

Le but de ce paragraphe est de donner quelques théorèmes généraux, en particulier d'existence et d'unicité de solutions, d'une équation différentielle du 1er ordre. Ces théorèmes fournissent des renseignements importants concernant le comportement de la solution sans avoir à la calculer explicitement.

4.2.1 Définitions

Soit U un domaine du plan $\{(t, y); t \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$. Soit f une fonction continue de U dans \mathbf{R} .

Définition 4.2.1 On appelle solution de l'équation différentielle du 1^{er} ordre

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t, y) \in U \quad (4.3)$$

tout couple $(I, \varphi(t))$ tel que

- I est un intervalle ouvert non vide de \mathbf{R}
- l'application $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ est une fonction dérivable de I dans \mathbf{R}
- le graphe $(t, \varphi(t))$ est contenu dans U
- $\forall t \in I, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

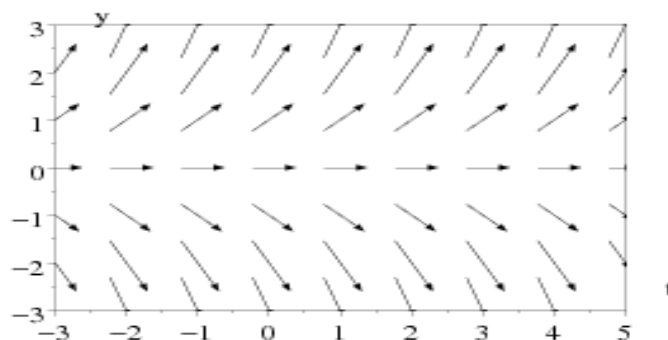
Quand on parle de solutions d'équations différentielles, on confond souvent la solution et son graphe (une courbe dans le plan (t, y)).

Définition 4.2.2 Champ de vecteurs

Le graphe d'une solution a pour tangente au point (t, y) la droite de pente $f(t, y)$. Le tracé dans le plan (t, y) pour $t_A \in I$ des vecteurs d'origine (t_A, y_A) de pente $f(t_A, y_A)$ permet de visualiser globalement l'allure de l'ensemble des courbes solutions. On obtient ainsi un "champ de flèches" associé à l'équation différentielle. Une solution de l'équation est une fonction dont le graphe est tangent en chaque point à la flèche ayant pour origine ce point.

Exemple 4.2.1 champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = y$ (voir figure 4.1).

Par chaque point (t_0, y_0) passe une courbe et une seule, appelée **trajectoire**. En faisant varier (t_0, y_0) , on obtient une famille de courbes. En général, on ne s'intéresse qu'à une courbe de cette famille, celle qui passe par un point (t_0, y_0) du plan : la condition initiale ou condition de Cauchy.

FIGURE 4.1 – Champ de vecteurs de $y' = y$

Définition 4.2.3 On appelle problème de Cauchy le système

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

le couple (t_0, y_0) est la donnée de Cauchy.

Exemple 4.2.2 Soient les problèmes de Cauchy suivants

1.

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t), & (t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ y(3) = 4. \end{cases}$$

La solution (maximale) est (\mathbf{R}, y) avec $y(t) = 4 \exp(2(t - 3))$.

2.

$$\begin{cases} y'(t) = 3y^{2/3}(t), & (t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Il existe deux solutions possibles (\mathbf{R}, y_1) et (\mathbf{R}, y_2) avec $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = t^3$.

On cherche donc des conditions pouvant garantir l'existence et l'unicité de la solution.

4.2.2 Existence et unicité

Théorème 4.2.1 Cauchy-Lipschitz : Unicité de la solution (maximale)

Si f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans un ouvert U du plan des variables (t, y) alors si t_0 et y_0 appartiennent à ce domaine il existe une unique solution (maximale) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Remarque 4.2.1 1. Dans l'exemple 1 précédent, on a : $f(t, y) = 2y$ (f ne dépend pas de t , on dit que l'équation est autonome) et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ sont continues dans \mathbf{R}^2 tout entier donc par un point du plan il ne passe qu'une courbe solution de l'EDO.

2. Dans l'exemple 2 précédent, $f(t, y) = 3y^{2/3}$ n'est pas dérivable en zéro. Toutes les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz n'étant pas vérifiées, il n'y a donc pas nécessairement unicité de la solution.

3.

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t), & (t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution.

Si $y_0 = 0$ alors $(\mathbf{R}, y(t))$ avec $y(t) = 0$ est la solution. On dit qu'elle est globale (définie sur \mathbf{R} tout entier),

Si $y_0 > 0$ alors $(] - \infty, t_0 + \frac{1}{y_0}[, y(t))$ avec $y(t) = \frac{1}{t_0 + \frac{1}{y_0} - t}$ est la solution.

Si $y_0 < 0$ on obtient la même fonction mais définie sur $]t_0 + \frac{1}{y_0}, +\infty[$ (l'intervalle de définition de la solution doit contenir t_0).

Ces deux dernières solutions sont maximales mais non globales. **Une solution n'est pas nécessairement définie sur \mathbb{R} tout entier.** Dans la plupart des cas étudiés, nous nous limiterons à une étude sur l'intervalle $I \cap [t_0; +\infty[$ que nous noterons parfois abusivement I .

4.2.3 Point stationnaire

Définition 4.2.4 Point stationnaire (ou d'équilibre, ...)

Un point $\bar{y} \in \mathbb{R}$ est appelé point stationnaire de $y'(t) = f(t, y)$ si $f(t, \bar{y}) = 0$ pour tout t . (Autrement dit, \bar{y} est une fonction constante solution de l'EDO).

Proposition 4.2.1 Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Si $y_0 = \bar{y}$ est un point stationnaire alors $\forall t \geq t_0, y(t) = \bar{y}$ est solution.

Exemple 4.2.3 L'équation $y'(t) = y(t) - y^3(t)$ admet 3 points stationnaires : $-1, 0$ et 1 .

Définition 4.2.5 On note y_z la solution de $y'(t) = f(t, y)$ telle que $y_z(t_0) = z$

On dira que y_{z_0} est stable s'il existe deux constantes positives ϵ et C telles que

pour tout z tel que $\|z - z_0\| \leq \epsilon$ alors $t \mapsto y_z(t)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$

pour tout z tel que $\|z - z_0\| \leq \epsilon$ et $t \geq t_0$ on a $\|y_z(t) - y_{z_0}(t)\| \leq C\|z - z_0\|$.

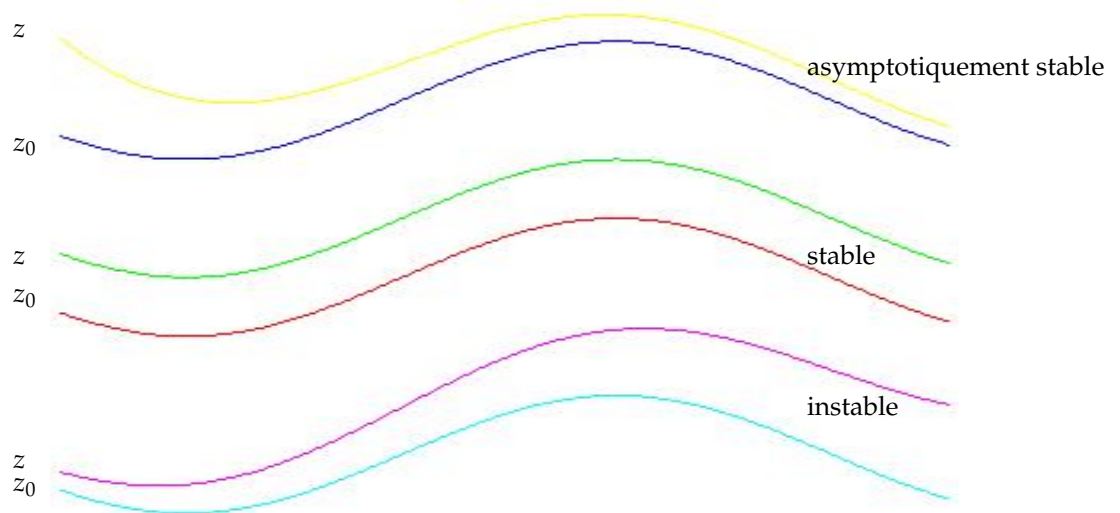
La solution est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si

il existe une fonction $\gamma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0$ telle que pour tout z tel que

$\|z - z_0\| \leq \epsilon$ et $t \geq t_0$ on a $\|y_z(t) - y_{z_0}(t)\| \leq \gamma(t)\|z - z_0\|$.

Plus intuitivement, une solution y_{z_0} est dite stable si les solutions dont la condition initiale est proche de z_0 restent proches de y_{z_0} au cours du temps. y_{z_0} est dite asymptotiquement stable si en plus les solutions convergent vers y_{z_0} (Une solution non stable est dite instable).

La signification géométrique de ces notions de stabilité peut s'illustrer par le schéma suivant



Exemple 4.2.4 L'équation $y'(t) = ky(t)$ admet 1 point stationnaire : 0 . Si $k > 0$, 0 est instable, si $k = 0$, 0 est stable et si $k < 0$, 0 est asymptotiquement stable.

Exemple 4.2.5 L'équation $y'(t) = y(t) - y^3(t)$ admet 3 points stationnaires : $-1, 0$ et 1 . -1 et 1 sont asymptotiquement stables. 0 est instable

4.2.4 Etude géométrique

Lemme 4.2.1 Supposons que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

admette une unique solution notée $(I_{y_0}, \varphi_{y_0}(t))$ alors

- i) $\varphi_{y_0}(t)$ est monotone en t .
- ii) $\varphi_{y_0}(t) < \varphi_{x_0}(t), \forall t \in I_{y_0} \cap I_{x_0}$ si $y_0 < x_0$.
- iii) Si $\varphi_{y_0}(t)$ est bornée alors la solution est définie sur $[t_0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{y_0}(t) = \bar{y}$ où \bar{y} est un point stationnaire.

Remarque 4.2.2 Le ii) du lemme signifie que : **deux trajectoires ne peuvent pas se couper.**

Exemple 4.2.6 Etude de la loi logistique (où r, K et y_0 sont des constantes positives fixées)

$$y'(x) = ry(x)\left(1 - \frac{y(x)}{K}\right) \text{ avec } y(0) = y_0.$$

Posons $f(u) = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$. f est une fonction dérivable dont la dérivée est continue. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

x représente ici le temps et le phénomène débute en $x = 0$ d'après la condition initiale (CI) $y(0) = y_0$, donc on étudiera cette équation que pour $x \geq 0$. $y \mapsto f(y)$ est définie sur \mathbf{R} tout entier mais on vérifiera que cette équation ne donne que des solutions $x \mapsto y(x)$ qui restent positives lorsque la CI est positive. (y représente la taille d'une population). On recherche les éventuels points stationnaires :

$$f(u) = 0 \iff \begin{cases} u = 0 \\ \text{ou} \\ u = K \end{cases}$$

Il y a donc deux points stationnaires.

1. si $y_0 = 0$ alors l'unique solution est (\mathbf{R}^+, y) avec $\forall x \in \mathbf{R}^+, y(x) = 0$.
2. si $y_0 = K$ alors l'unique solution est (\mathbf{R}^+, y) avec $\forall x \in \mathbf{R}^+, y(x) = K$.
3. si $0 < y_0 < K$ alors d'après le lemme 4.2.1 ii), la solution (I, y) est telle que $\forall x \in I, 0 < y(x) < K$ (deux solutions ne peuvent pas se couper).
Alors d'une part, d'après i), y est monotone strictement croissante ($y' = f(y)$ et f est positive sur $[0, K]$).
D'autre part, y est bornée alors $I = [0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = K$.
4. si $y_0 > K$ par un raisonnement similaire, on a $\forall x \in I, y(x) > K$, y est strictement décroissante. On a donc $y_0 > y > K$. alors $I = [0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = K$.

4.2.5 Intervalle maximal

Dans ce paragraphe, on suppose que f vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

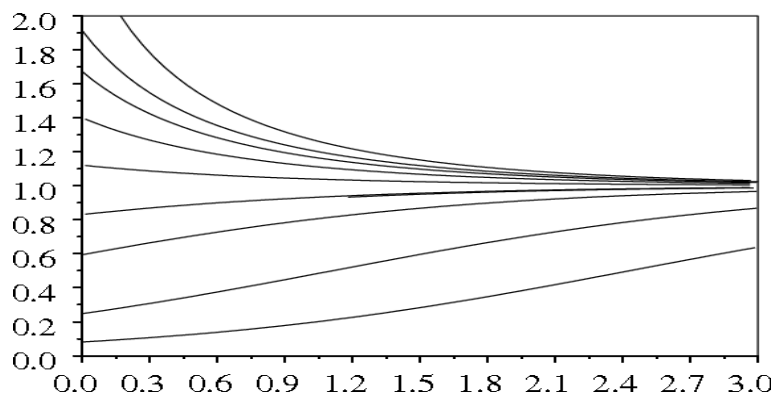
Lemme 4.2.2 Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'unique solution y définie sur $I = [t_0, T_{max}[$ est telle que

soit $T_{max} = +\infty$

soit $T_{max} < +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow T_{max}} y(x) = +\infty$.

FIGURE 4.2 – Trajectoires de $y' = y(1 - y)$

Remarque 4.2.3 Ce lemme est une conséquence du lemme 4.2.1 iii).

Théorème 4.2.2 Si l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

y est telle que

$$|y(t)| \leq g(t)$$

avec $g(t)$ continue sur \mathbf{R}^+ alors y est définie sur $[0, +\infty[$ (donc $T_{max} = +\infty$).

Exemple 4.2.7

$$x'(t) = t + \sin(x(t))$$

$|x(t)| \leq g(t)$ avec $g(t) = \frac{t^2}{2} + t - \frac{t_0^2}{2} - t_0 + x(t_0)$. Par conséquent x est définie sur $[0, +\infty[$.

4.2.6 Positivité - Théorème de comparaison - Régions invariantes

Dans ce paragraphe, on suppose que f et g vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 4.2.3 Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = m(x)y(x) + \varphi(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

On suppose que $y_0 \geq 0$ et $\varphi(x) \geq 0$ alors $y(x) \geq 0$ tant qu'elle existe.

Idée de la preuve : En calculant explicitement la solution, on a

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x m(s) ds} + \int_{x_0}^x \varphi(s) e^{-\int_s^x m(u) du} ds.$$

Exemple 4.2.8 Soit un modèle de croissance d'une population P :

$$P' = aP \quad P(0) = P_0$$

si $a < 0$ alors $(P(t) = P_0 e^{-at})$ la population tend vers l'extinction. Pour éviter l'extinction, on essaie de réinjecter des individus :

$$P'(t) = aP(t) + \delta(t)$$

avec $\delta(t) \geq 0$ alors $P(t) \geq 0$.

Le modèle indique que si on ajoute des individus, on évite l'extinction. On pourra prendre par exemple un apport périodique $\delta(t) = 1 + \sin(t)$.

Théorème 4.2.4 Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

On suppose que $f(x, 0) \geq 0$ et $y_0 \geq 0$ alors $y(x) \geq 0$ tant qu'elle existe.

Exemple 4.2.9 Soit un modèle de croissance d'une population P :

$$P' = P(54 - 3P)(16P - 10) + 14(1 + \cos(t)) \quad P(0) = P_0$$

On a $f(t, P) = P(54 - 3P)(16P - 10) + 14(1 + \cos(t))$ et $f(t, 0) = 14(1 + \cos(t)) \geq 0$.

Par conséquent si $P_0 \geq 0$ alors $P(t) \geq 0$

Théorème 4.2.5 Soient les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

On suppose que

$$\forall u \in \mathbf{R} \quad \forall t \geq t_0 \quad \begin{cases} f(t, u) \geq g(t, u) \\ y_0 \geq z_0 \end{cases}$$

alors $y(t) \geq z(t)$ tant que les deux existent.

Exemple 4.2.10

$$\begin{cases} y' = y - y^2 \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$$

Posons $f_1(y) = y - y^2$ et $f_2(y) = y$ et comparons les deux problèmes

$$\begin{cases} y' = f_1(y) \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f_2(y) \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$$

Comme pour tout y positif, $f_1(y) \leq f_2(y)$, on a

$$0 \leq y_1(t) \leq y_2(t)$$

pour tout $t \in [0, T_{1\max}[\cap]0, T_{2\max}[$ (tant que les deux solutions existent). De plus, on sait que $y_2(t) = \exp(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$. Alors pour tout t fixé, $y_2(t) \leq +\infty$. En appliquant le théorème des gendarmes et le lemme 4.2.2, on en déduit que $y_1(t) \leq +\infty$ et $T_{1\max} = +\infty$.

Définition 4.2.6 Une région Ω est dite positivement invariante par une équation différentielle si une solution partant de Ω reste dans Ω pour tout temps t positif.

Exemple 4.2.11 Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - y^2(t), & (t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ y(t_0) = y_0 & y_0 > 0. \end{cases}$$

La région $\Omega = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ est positivement invariante.

Si $(t, y_0) \in \Omega$ alors $(t, y(t)) \in \Omega$ pour tout $t > 0$. En effet, on ne peut pas couper $y = 0$ qui est un point d'équilibre.

Commentaire : Lorsque une solution $x(t)$ représente une concentration par exemple, il est important que $(t, x(t))$ reste toujours dans \mathbf{R}_+^2 .

4.3 La modélisation mathématique

La modélisation dans les disciplines biologiques

- La biochimie
- La génétique
- La physiologie
- L'agronomie et épidémiologie
- la biologie des populations et l'écologie

Quelques modèles mathématiques à une population en évolution des populations

Ces modèles ont pour but l'étude de l'évolution d'une population d'individus susceptibles de se reproduire, de mourir ou d'agir les uns sur les autres. Exemples : microbes, bactéries, démographie, propagation d'épidémie, ...

On notera

- $P(t)$ la taille d'une population.
- $b(P, t)$ le taux de fertilité de la population par unité de temps
- $m(P, t)$ le taux de mortalité
- $g(P, t) = b(P, t) - m(P, t)$ le taux de croissance
- $\varphi(t)$ les apports extérieurs

Une modélisation de la dynamique de cette population (évolution en fonction du temps) est

$$P'(t) = b(P, t)P(t) - m(P, t)P(t) + \varphi(t)$$

soit encore

$$P'(t) = g(P, t)P(t) + \varphi(t).$$

- **Modèle de Malthus (1798) - loi exponentielle**

Dans ce modèle, on considère que

$$b(P, t) = b \quad m(P, t) = m \quad \varphi(t) = 0$$

où b et m sont des constantes réelles positives.

L'équation différentielle obtenue est :

$$P'(t) = (b - m)P(t)$$

dont les solutions sont $P(t) = P(0)e^{(b-m)t}$.

- **Modèle de Verhulst (1838) - loi logistique**

Dans ce modèle, on considère que

$$b(P, t) = b \quad m(P, t) = m + \alpha P(t) \quad \varphi(t) = 0$$

où b , m et α sont des constantes réelles positives.

on dit que la mortalité est densité dépendante c'est-à-dire dépend du nombre d'individus.

L'équation différentielle obtenue est :

$$P'(t) = (b - m)P(t) - \alpha P^2(t)$$

dont les solutions sont $P(t) = \frac{K}{e^{-(b-m)t} + \frac{\alpha}{b-m}}$.

- **Modèle de Mickaëlis - fonction de saturation**

Dans ce modèle, on considère que

$$g(P, t) = \frac{\alpha P^n}{\beta + P^n} \quad \varphi(t) = 0$$

où α et β sont des constantes réelles positives.

g est une fonction dite de saturation L'équation différentielle obtenue est :

$$P'(t) = g(P, t)P(t).$$

- **Modèle de Gompertz (1829)**

Dans ce modèle, on considère que

$$g(P, t) = \gamma \left(\ln \frac{K}{P(t)} \right) \quad \varphi(t) = 0$$

dont les solutions sont $P(t) = K \exp(\ln \frac{P_0}{K} e^{-\gamma t})$.

- **Modèle de Allee (1950)**

Dans ce modèle, on considère que

$$g(P, t) = a(P(t) - P_1)(P_2 - P(t)) \quad \varphi(t) = 0$$

où a , P_1 et P_2 sont des constantes réelles positives.

L'équation différentielle obtenue est :

$$P'(t) = a(P(t) - P_1)(P_2 - P(t))P(t).$$

Aujourd'hui, ces modèles simples ayant montrés leur limites, la modélisation a évolué vers des EDP (équations aux dérivées partielles) pour prendre en compte la spatialisation, l'hétérogénéité spatiale et sociale des individus .

4.4 Méthodes de résolution explicites de quelques équations

On se propose d'étudier quelques types classiques d'équations différentielles du premier ordre (et du second ordre) pour lesquelles on sait ramener le calcul des solutions à des calculs de primitives.

4.4.1 Equations du premier ordre

Equations à variables séparées

- a) Equations du type $y'(t) = f(t)$ où $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est continue.
Les solutions sont données par $y(t) = F(t) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ et où F est une primitive de f sur I .
- b) Equations du type $y'(t) = g(y)$ où $g : J \rightarrow \mathbf{R}$ est continue.
-Notons y_j les racines de $g(y) = 0$ dans l'intervalle J . Alors $y(t) = y_j$ est une solution évidente de l'équation.
-Dans $\{(t, y); g(y) \neq 0\}$, on a

$$y'(t) = g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = dt.$$

Les solutions sont données par $G(y) = t + \lambda$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ et où G est une primitive de $1/g$ sur chaque ouvert $]y_j; y_{j+1}[$. Comme $G' = 1/g$ et que g est de signe constant sur $]y_j; y_{j+1}[$ (car g est continue et ne s'annule pas), on en déduit que G est une application continue strictement monotone sur $]y_j; y_{j+1}[$. Par conséquent G étant bijective sur cet intervalle, on peut exprimer y en fonction de t :

$$y(t) = G^{-1}(t + \lambda) \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

- c) Cas général des équations à variables séparées $y'(t) = f(t)g(y)$ où f et g sont continues.
-Si $g(y_j) = 0$, alors la fonction constante $y(t) = y_j$ est une solution évidente de l'équation.
-Dans $\{(t, y); g(y) \neq 0\}$, on a

$$y'(t) = f(t)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(t)dt.$$

Les solutions sont données par $G(y) = F(t) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ et F (resp. G) est une primitive de f (resp. $1/g$). Comme G est une application strictement monotone sur $]y_j; y_{j+1}[$, on obtient

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + \lambda) \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Equations linéaires

Ce sont les équations de la forme

$$(E) : y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

où $a, b : I \rightarrow \mathbf{R}$ sont des fonctions continues.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière y_1 de (E) , alors par soustraction on obtient :

$$y'(t) - y_1'(t) = a(t)(y(t) - y_1(t))$$

c'est-à-dire que $z(t) = y(t) - y_1(t)$ vérifie l'équation sans second membre

$$(E0) : z'(t) = a(t)z(t).$$

Inversement, si z est solution de $(E0)$, alors $y = z + y_1$ est solution de (E) .

Théorème 4.4.1 La solution générale de (E) s'écrit $y = y_1 + z$ où y_1 est une solution particulière de (E) et où z est la solution générale de (E0).

a) Solutions de (E0)

Comme $f(t, z) = a(t)z$ est continue, de dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial z}(t, z) = a(t)$ continue, on sait que le problème de Cauchy admet une unique solution en tout point (t_0, z_0) . Comme $z(t) = 0$ est solution de (E0), aucune autre solution ne peut s'annuler en un point quelconque de I . On peut donc écrire

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = a(t) \Leftrightarrow \ln |z(t)| = A(t) + C$$

où A est une primitive a et $C \in \mathbf{R}$. On en déduit

$$|z(t)| = e^C \exp(A(t)).$$

Comme z est continue et ne s'annule pas, son signe est constant. On a donc

$$z(t) = \lambda \exp(A(t)) \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Inversement, les fonctions définies par $z(t) = \lambda \exp(A(t))$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ sont solutions de (E0).

Théorème 4.4.2 Les solutions maximales de (E0) sont de la forme $z(t) = \lambda \exp(A(t))$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$

b) Recherche d'une solution particulière de (E)

On peut utiliser la méthode dite de variation de la constante, c'est-à-dire que l'on cherche y_1 sous la forme

$$y_1(t) = \lambda(t) \exp(A(t)) \quad \text{où } \lambda \text{ est dérivable.}$$

En dérivant, on obtient

$$y_1'(t) = \lambda'(t) \exp(A(t)) + \lambda(t)a(t) \exp(A(t))$$

donc y_1 est solution de (E), si l'on prend

$$\lambda'(t) \exp(A(t)) = b(t)$$

soit

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^t b(s) \exp(-A(s)) ds.$$

Equations se ramenant à des équations linéaires

a) Equations de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme

$$(E) : y'(t) = p(t)y(t) + q(t)y^\alpha(t)$$

où $\alpha \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$ et $p, q : I \rightarrow \mathbf{R}$ sont des fonctions continues.

On se place dans $\{(t, y); y > 0\}$, en multipliant par $y^{-\alpha}$, on obtient

$$(E) \Leftrightarrow y^{-\alpha} \frac{dy}{dt} = p(t)y^{1-\alpha} + q(t).$$

Posons $z = y^{1-\alpha}$ alors $\frac{dz}{dt} = (1-\alpha) \frac{dy}{dt} y^{-\alpha}$, d'où

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha} \frac{dz}{dt} = p(t)z + q(t).$$

On est donc ramené à une équation linéaire en z .

4.4.2 Equations du second ordre à coefficients constants

Ce sont des équations de la forme :

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(t)$$

où a, b, c sont des constantes (a non nulle) et f une fonction continue.

Nous ne donnons ici que la méthode : comme pour les équations du 1er ordre, on résout l'équation sans second membre et on cherche ensuite une solution particulière de l'équation (E).

a) Solutions de l'équation sans second membre (ESSM) (E0)

On cherche les racines de l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$. Soit Δ son discriminant.

• $\Delta > 0$: l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 . La solution générale de (E0) est :

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

• $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine double r_0 . La solution générale de (E0) est :

$$y(t) = (At + B)e^{r_0 t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

• $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. La solution générale de (E0) est :

$$y(t) = (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))e^{\alpha t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

b) Recherche d'une solution particulière de (E)

On cherche une solution particulière d'après la forme du second membre ou par la méthode de variation de la constante.

La solution générale de (E) est la somme de cette solution particulière et de la solution de l'ESSM.

Chapitre 5

Simulation numérique des ED

Il est en général impossible de trouver des solutions explicites aux ED, c'est-à-dire pour un problème

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = \alpha \end{cases}$$

on ne sait pas trouver une expression $x(t) = \dots$. En revanche, on peut à l'aide d'un ordinateur faire des simulations numériques. Le principe général des méthodes de simulation consiste à subdiviser l'intervalle de temps pendant lequel on veut faire la simulation. Par exemple, on découpe $[t_0; T_{max}]$ en n subdivisions $t_0, t_1, \dots, t_n = T_{max}$. On construit une suite x_0, x_1, \dots, x_n telle que x_i approche la valeur exacte de la solution $x(t_i)$. Nous allons citer les méthodes les plus classiques permettant de réaliser de telles simulations. Ces méthodes (Euler, Runge-Kutta, ...) sont déjà programmées dans la plupart des logiciels d'ED ou de mathématiques. Mais elles ne donnent que des approximations numériques : les valeurs calculées sont entachées d'erreur. Il faut donc vérifier la précision des calculs.

5.1 Méthode d'Euler

On découpe $[t_0; T_{max}]$ en n intervalles de largeur $h = \Delta t = \frac{T_{max} - t_0}{n}$ (h est appelé le pas de discrétisation et c'est une fonction de n). On pose $t_i = t_0 + ih$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy affirme que si f est suffisamment régulière ce problème possède une unique solution. Notons x cette solution. On va construire une suite de points (t_i, x_i) proche des points $(t_i, x(t_i))$. L'idée d'Euler consiste à approcher la dérivée $x'(t)$ par le quotient $\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$, d'où

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx f(x(t))$$

ce qui peut encore s'écrire

$$x(t+h) \approx x(t) + hf(t, x(t)).$$

On construit ainsi la suite x_0, x_1, \dots, x_n

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) \end{cases}$$

C'est la méthode dite d'Euler.

5.1.1 L'équation logistique avec la méthode d'Euler

Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) = rx(t)(1 - \frac{x(t)}{K}) \\ x(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Appliqué à ce problème, le schéma d'Euler nous donne

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{i+1} = x_i + hr x_i (1 - \frac{x_i}{K}) \end{cases}$$

comme on connaît la solution analytique de l'équation logistique, on peut la calculer et comparer. (cf. fichier eulerlogistique.xls) Exemple en prenant $r = 0,5$, $K = 10$ et $\alpha = 1$ et $h = 1$

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x(t_i)$	1	1,548	2,319	3,324	4,508	5,751	6,905	7,863	8,584	9,091	9,428
x_i	1	1,45	2,069	2,890	3,918	5,109	6,358	7,516	8,449	9,104	9,512

5.2 Concepts de base de l'approximation numérique

5.2.1 Convergence et stabilité

Il faut maintenant vérifier que plus h est petit (ou plus n est grand), meilleure est l'approximation obtenue, c'est la notion de convergence.

Définition 5.2.1 La solution discrétisée (la suite des x_i) est convergente si

$$\sup_{0 \leq i \leq n} |x_i - x(t_i)| \leq \epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

La solution est stable si

$$\sup_{0 \leq h \leq h_0} \sup_{0 \leq i \leq n} |x_i| < +\infty$$

La stabilité assure qu'aucune valeur calculée n'explose. La convergence implique la stabilité.

5.2.2 Méthodes explicites, implicites, à pas multiples

Définition 5.2.2 On dit que l'on a un algorithme de discrétisation à un pas si on a une procédure permettant de calculer x_i connaissant x_{i-1} , t_{i-1} et t_i . La méthode est dite explicite si la procédure est de la forme

$$x_i = \phi(x_{i-1}, t_{i-1}, t_i, h)$$

on calcule directement x_i . Elle est dite implicite si on doit résoudre une équation pour trouver x_i

$$\psi(x_i, x_{i-1}, t_{i-1}, t_i, h) = 0$$

On dit que l'on a une procédure à pas multiples p -pas $p \geq 2$ si pour calculer x_i on a besoin de

$$\begin{cases} x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-p} \\ t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-p}, h. \end{cases}$$

Elle est explicite si

$$x_i = \phi(x_{i-1}, \dots, x_{i-p}, t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-p}, h)$$

Elle est implicite si

$$\phi(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-p}, t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-p}, h) = 0$$

5.3 Quelques méthodes numériques

5.3.1 Exemples

En intégrant l'équation $x(t) = f(t, x)$ entre t_i et t_{i+1} , on obtient

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt$$

en choisissant une méthode d'intégration numérique, on obtient différentes procédures

1. Euler à un pas explicite
 $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt \approx \text{aire du rectangle de longueur } f(t_{i+1})$
2. Euler à un pas implicite
 $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt \approx \text{aire du rectangle de longueur } f(t_i)$
3. Trapèze à un pas implicite
 $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt \approx \text{aire du trapèze}$
4. Point central à deux pas explicite

5. Runge Kutta
 $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t)) dt \approx \text{méthode de Simpson}$

5.3.2 Méthodes de Runge-Kutta

La méthode d'Euler n'est pas la meilleure méthode. Il faut choisir un pas de discrétisation h petit pour obtenir une bonne approximation, ce qui coûte cher en temps de calcul. Aussi d'autres méthodes plus efficaces existent. Les méthodes de Runge-Kutta sont plus précises et moins coûteuses. Elles consistent à prendre des points intermédiaires dans chaque intervalle $[t_i; t_{i+1}]$ de sorte que l'approximation de la dérivée $x'(t)$ soit plus précise. (on va plus loin dans le développement de Taylor de f). L'approximation est d'autant meilleure (meilleure précision) que le développement comporte plus de termes mais le temps de calcul augmente d'autant : il faut faire un compromis. On désigne par RK_{pq} les méthodes de Runge Kutta d'ordre p avec $q - 1$ points de calculs intermédiaires. On calcule

$$x_{i0} = f(t_i, x_i)$$

puis les points intermédiaires

$$x_{ik} = x_{i0} + h \sum_{j=0}^{k-1} a_{ij} f(t_{ij}, x_{ij})$$

avec $1 \leq k \leq q$, $t_{ik} = t_i + \theta_k$ où θ_k $0 \leq \theta_k \leq 1$, est choisi arbitrairement sauf $\theta_0 = 0$ et $\theta_q = 1$.

Exemples RK4

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = x_0 + ih \\ k_1 = hf(t_i, x_i) \\ k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(t_i + h, x_i + k_3) \\ x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right.$$

Lorsque RK4 est dépassé, il existe d'autres méthodes plus précises plus adaptables (avec davantage d'options) : lsoda, ... souvent implémentées dans les bibliothèque des logiciels de mathématiques.

Chapitre 6

Modélisation par SD de phénomènes biologiques à plusieurs espèces

On considère maintenant un système différentiel (SD) c'est-à-dire n équations différentielles d'ordre 1. Cela peut être un modèle comportant n variables (par exemple plusieurs populations en interaction) que l'on regroupe en un vecteur Y de \mathbf{R}^n ou bien un modèle d'une seule variable $x(t)$ où interviennent les dérivées d'ordre $1, 2, 3, \dots, n$.

6.1 Introduction : deux exemples

Exemple 6.1.1 modélisation du mouvement d'un pendule *Considérons le mouvement dans le plan et sans frottement d'un pendule. L'angle $\theta(t)$ du pendule avec la verticale vérifie l'équation (d'après la loi de Newton)*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

C'est une équation du second ordre que l'on peut transformer en un système d'équations du 1er ordre en introduisant $x_1(t) = \theta(t)$ et $x_2(t) = \frac{d\theta}{dt}$. Ainsi on obtient le système (appelé oscillateur harmonique)

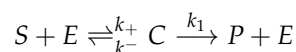
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x_1(t) \end{cases}$$

souvent étudié pour de petites oscillations (on fait l'hypothèse $\sin x_1(t) \equiv x_1(t)$).

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{l} x_1(t) \end{cases}$$

Ce système est un système linéaire où n'apparaît qu'une variable (l'angle) et sa dérivée. Il est appelé oscillateur linéaire harmonique.

Exemple 6.1.2 modélisation d'une réaction enzymatique *On considère un substrat S réagissant avec une enzyme E pour former un complexe C qui se transforme en un produit P et l'enzyme.*



Appelons e_0 la concentration totale d'enzyme (libre représentée par E ou liée dans le complexe C). Appelons $s, e, c,$ et p les concentrations de S, E, C et P . D'après la loi d'action de masse, on peut modéliser cette réaction par le

système suivant

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -k_+es + k^-c & s(0) = s_0 & (1) \\ \frac{de}{dt} = -k_+es + k^-c + k_1c & e(0) = e_0 & (2) \\ \frac{dc}{dt} = k_+es - k^-c - k_1c & c(0) = c_0 & (3) \\ \frac{dp}{dt} = k_1c & p(0) = p_0 & (4) \end{cases}$$

où k_+ , k^- et k_1 sont des constantes dépendantes du taux de réaction.

De (4), on obtient $p(t) = k_1 \int_0^t c(t)dt$. De plus, la concentration de l'enzyme (libre plus combinée) est constante. On le retrouve en additionnant (2) et (3).

$$\frac{de}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0 \rightarrow e(t) + c(t) = e_0.$$

Notre système se réduit donc

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -k_+(e_0 - c)s + k^-c & s(0) = s_0 & (1) \\ \frac{dc}{dt} = k_+(e_0 - c)s - k^-c - k_1c & c(0) = c_0 & (3) \end{cases}$$

Ce modèle est un système différentiel où interviennent deux variables (deux concentrations). Nous étudierons ce type de problème non linéaire (NL) seulement localement. Nous nous placerons au voisinage d'un point où nous transformerons le problème NL en un problème linéaire, qui sera une approximation de ce problème (valide seulement au voisinage du point).

6.2 Cas particulier : système linéaire

Définition 6.2.1 On appelle système différentiel linéaire d'ordre 1 dans \mathbf{R}^m une équation

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + b(t)$$

où $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$ est la fonction inconnue et où $A(t) = a_{ij}(t) \in M_m(\mathbf{R})$ et $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$

sont des fonctions continues données.

Si A et b sont des matrices à coefficients constants, on sait calculer les solutions de manière explicite. Nous exposons dans ce qui suit la méthode pour $n = 2$.

6.2.1 Recherche des solutions en dimension 2

On sait résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1(t) & x_1(0) = x_1^0 \\ \frac{dx_2}{dt} = bx_2(t) & x_2(0) = x_2^0 \end{cases}$$

Les solutions sont $x_1(t) = x_1^0 \exp at$ et $x_2(t) = x_2^0 \exp bt$. Dans le cas général, on va donc chercher des solutions du type $X(t) = ve^{\lambda t}$ où v est un vecteur constant. De $x' = Ax$, on obtient $\lambda ve^{\lambda t} = A ve^{\lambda t}$ soit encore $\lambda v = Av$, on est donc amené à chercher les valeurs propres de A .

1er cas A admet deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 .

Théorème 6.2.1 Les solutions de $x' = Ax$ sont de la forme :

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

où (v_1, v_2) sont les vecteurs propres associés à (λ_1, λ_2) et c_1, c_2 deux constantes.

Exemple 6.2.1

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 \\ x_1(0) = x_2(0) = 1 \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \lambda_2) = (5, -5)$ de vecteurs propres associés $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. La forme générale des solutions est donc

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1e^{5t} + c_2e^{-5t} \\ c_1e^{5t} - 3c_2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

A l'aide des conditions initiales, on détermine les constantes : $c_1 = \frac{2}{5}$ et $c_2 = \frac{-1}{5}$.

2ème cas A admet une valeur propre réelle double λ .

Théorème 6.2.2 Les solutions de $x' = Ax$ sont de la forme :
si A est diagonalisable

$$x(t) = (c_1v_1 + c_2v_2)e^{\lambda t}$$

où (v_1, v_2) sont les vecteurs propres (linéairement indépendants) associés à λ et (c_1, c_2) deux constantes.
si A n'est pas diagonalisable

$$x(t) = c_1v_1e^{\lambda t} + c_2(tv_1 + v_2)e^{\lambda t}$$

où v_1 est un vecteur propre associé à λ , et v_2 un vecteur propre généralisé c'est-à-dire vérifiant $(A - \lambda I)v_2 = v_1$
et c_1, c_2 deux constantes.

En effet si A n'est pas diagonalisable $x(t) = c_1v_1e^{\lambda t}$ est une solution de $Ax = x'$. On cherche alors une autre solution de la forme $x(t) = (tv_1 + v_2)e^{\lambda t}$. En la substituant dans $Ax = x'$, on obtient

$$e^{\lambda t}A(tv_1 + v_2) = \lambda e^{\lambda t}(tv_1 + v_2) + e^{\lambda t}v_1$$

d'où pour tout t ,

$$A((tv_1 + v_2) = \lambda(tv_1 + v_2) + v_1$$

soit

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda v_1 \\ Av_2 = \lambda v_2 + v_1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda I)v_1 = 0 \\ (A - \lambda)v_2 = v_1 \end{cases}$$

Exemple 6.2.2

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 \\ x_1(0) = 4 \quad x_2(0) = 8 \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ admet une valeur propre double $\lambda = 2$. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre généralisé associés à la valeur propre λ . La forme générale des solutions est donc

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2t)e^{2t} \\ (c_1 + c_2(t+1))e^{2t} \end{pmatrix}$$

3ème cas A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

Théorème 6.2.3 Les solutions de $x' = Ax$ sont de la forme :

$$x(t) = c_1v_1e^{\lambda_1 t} + c_2v_2e^{\lambda_2 t}$$

où (v_1, v_2) sont les vecteurs propres associés à (λ_1, λ_2) et (c_1, c_2) deux constantes complexes.
ce qui peut encore s'écrire

$$x(t) = e^{\alpha t}(h_1 \cos(\beta t) + h_2 \sin(\beta t))$$

où $h_1 = c_1v_1 + c_2v_2$ et $h_2 = i(c_1v_1 - c_2v_2)$.

Exemple 6.2.3

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_1(0) = x_2(0) = 1 \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda = -1 \pm i$.

La forme générale des solutions est donc

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}(h_1 \cos(t) + h_2 \sin(t)) \end{pmatrix}$$

De $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$, on tire $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puis en dérivant, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = e^{-t}(-h_1(\cos(t) + \sin(t)) + h_2(\cos(t) - \sin(t)))$$

Comme $x' = Ax$, on a $x'(0) = Ax(0)$ d'où

$$\begin{pmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{pmatrix} = -h_1 + h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient

$$x_1(t) = e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))$$

$$x_2(t) = e^{-t}(\cos(t) + 3 \sin(t)).$$

Théorème 6.2.4 Si A est inversible, les solutions de $x' = Ax + b$ sont de la forme

$$x(t) = y(t) - A^{-1}b$$

où y est la solution de $y' = Ay$.

6.2.2 Point stationnaire et stabilité

Définition 6.2.2 Un point stationnaire du système différentiel $x' = Ax + b$ est un élément \bar{x} de \mathbb{R}^n tel que $A\bar{x} + b = 0$.

Proposition 6.2.1 Si A est inversible, alors le seul état stationnaire du système différentiel $x' = Ax + b$ est $\bar{x} = -A^{-1}b$.

Remarque 6.2.1 Si A n'est pas inversible, soit il y a une infinité d'états stationnaires, soit il n'y en a aucun. Dans ces cas, l'étude de la stabilité qui suit devient sans objet.

Rappelons la définition de la stabilité

Définition 6.2.3 On note y_z la solution de $y'(t) = Ay(t)$ telle que $y_z(t_0) = z$

On dira que y_{z_0} est stable s'il existe deux constantes positives ϵ et C telles que

pour tout z tel que $\|z - z_0\| \leq \epsilon$ alors $t \mapsto y_z(t)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$

pour tout z tel que $\|z - z_0\| \leq \epsilon$ et $t \geq t_0$ on a $\|y_z(t) - y_{z_0}(t)\| \leq C\|z - z_0\|$.

La solution est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si

il existe une fonction $\gamma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0$ telle que pour tout z tel que $\|z - z_0\| \leq \epsilon$ et $t \geq t_0$ on a $\|y_z(t) - y_{z_0}(t)\| \leq \gamma(t)\|z - z_0\|$.

Plus intuitivement, une solution y_{z_0} est dite stable si les solutions dont la condition initiale est proche de z_0 restent proches de y_{z_0} au cours du temps. y_{z_0} est dite asymptotiquement stable si en plus les solutions convergent vers y_{z_0} (Une solution non stable est dite instable).

Théorème 6.2.5 Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative, $0_{\mathbb{R}^n}$ est un point stationnaire globalement asymptotiquement stable du système différentiel $x' = Ax$.

Si l'une des valeurs propres de A est de partie réelle strictement positive, $0_{\mathbb{R}^n}$ est un point stationnaire instable du système différentiel $x' = Ax$.

Idée de la preuve :

6.3 Représentation des solutions

Reprenons le cas particulier de l'oscillateur harmonique

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

On sait maintenant résoudre ce système linéaire. On a

$$\begin{cases} x_1(t) = a \sin t \\ x_2(t) = b \cos t \end{cases}$$

Les valeurs des constantes a et b sont fixées par des conditions initiales. On peut alors tracer les graphes de $t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ dans le plan (cf. figure 6.1).

On peut aussi représenter $(t, x_1(t), x_2(t))$ en 3 dimensions (cf. figure 6.2).

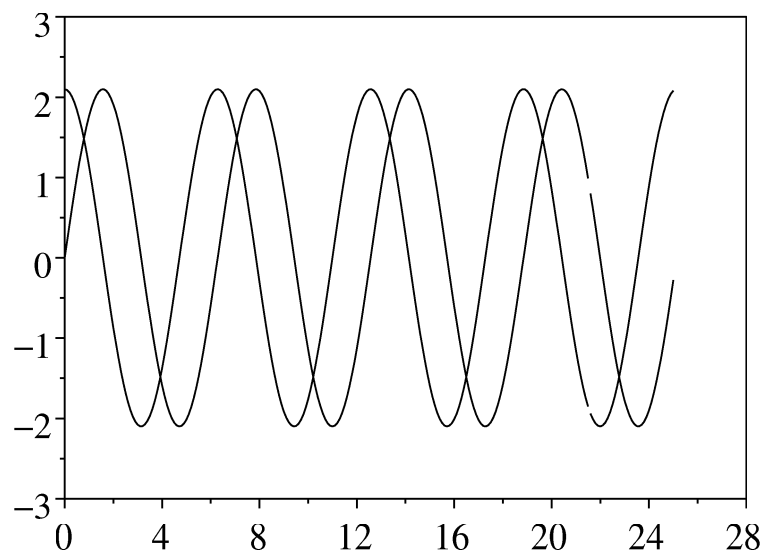


FIGURE 6.1 – Graphes de $x_1(t)$ et $x_2(t)$

On peut projeter les solutions $t, x_1(t), x_2(t)$ dans le plan $x_1(t), x_2(t)$, on obtient alors une orbite (cf. figure 6.3) (Cela s'avère utile lorsque le système est d'ordre supérieur à 2).

On peut aussi dessiner, comme en dimension 1, le champ de vecteurs (cf. figure 6.4).

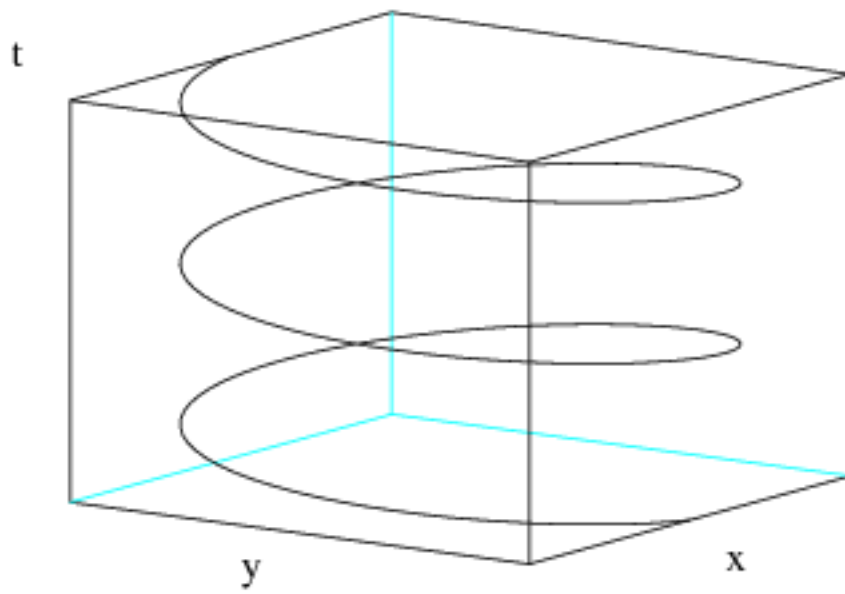


FIGURE 6.2 – Représentation paramétrique $(t, x_1(t), x_2(t))$

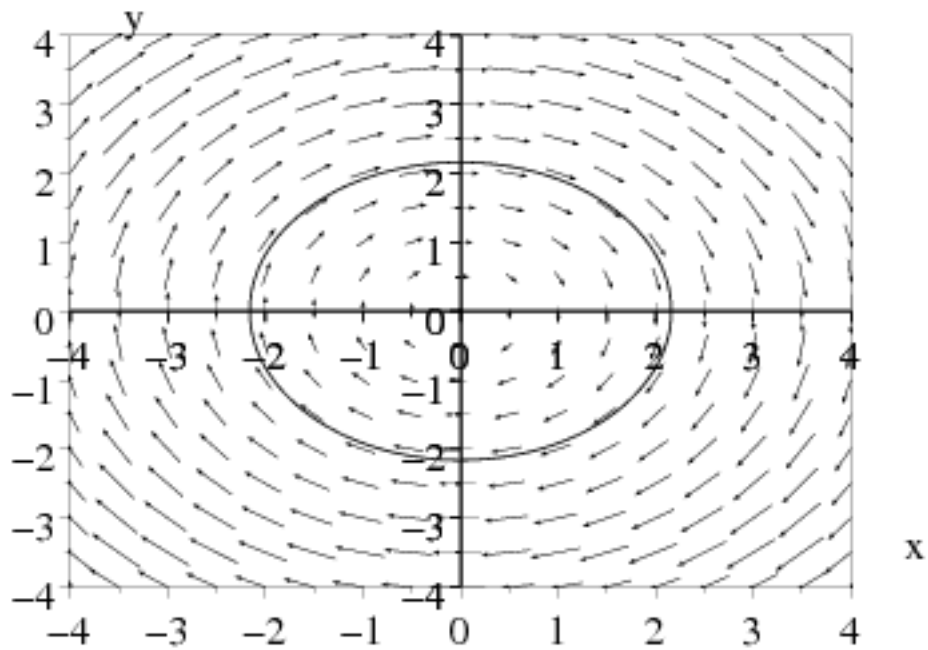


FIGURE 6.3 – Une orbite $(x_1(t), x_2(t))$

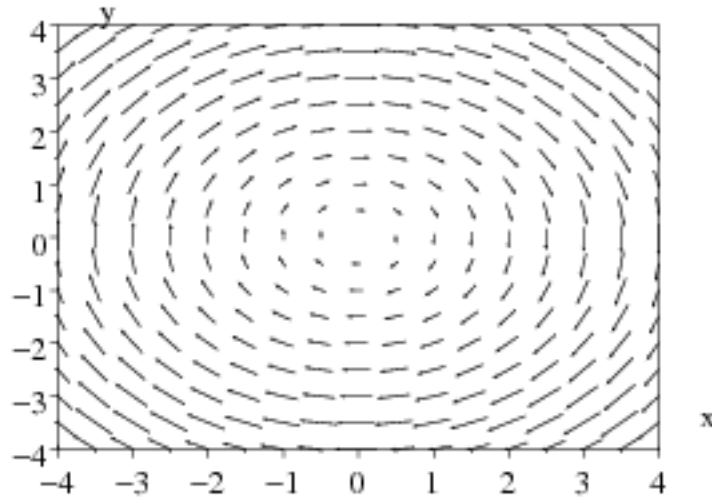


FIGURE 6.4 – Champ de vecteurs

Et enfin, on peut dessiner plusieurs orbites (obtenues avec différentes conditions initiales), le portrait de phase (cf. figure 6.5).

6.4 Système différentiel non linéaire

6.4.1 Définitions

Définition 6.4.1 On appelle système différentiel d'ordre 1 dans \mathbb{R}^m une équation

$$\frac{dY(t)}{dt} = F(t, Y(t))$$

où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$ est la fonction inconnue et où $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ est une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}^m$

donnée ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1, \dots, y_m) \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1, \dots, y_m) \\ \dots \\ y_m'(t) = f_m(t, y_1, \dots, y_m) \end{cases}$$

Remarque 6.4.1 Une équation différentielle de la forme

$$x^{(k)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t)),$$

peut s'écrire en posant

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \dots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix},$$

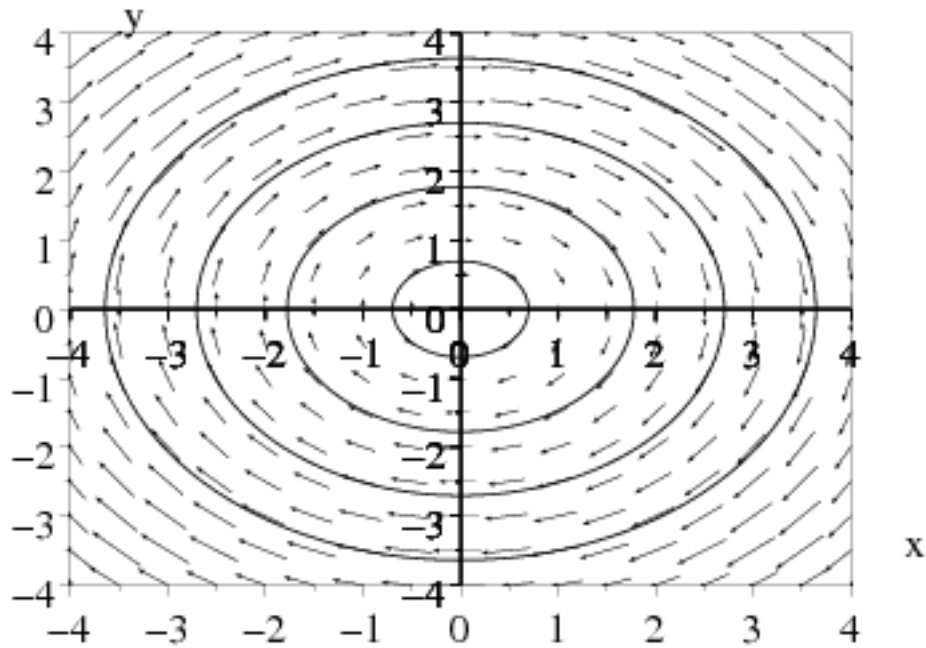


FIGURE 6.5 – Portrait de phase

sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ \dots \\ y_k'(t) = g(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)) \end{cases}$$

Exemple 6.4.1 L'équation différentielle d'ordre 2 :

$$x'' - x' + x = 5$$

en posant

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix},$$

peut s'écrire sous la forme $Y' = F(Y)$ avec

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2) = y_2 \\ f_2(y_1, y_2) = y_2(t) - y_1(t) + 5 \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous allons nous limiter aux équations autonomes où $F(t, Y) = F(Y)$

Définition 6.4.2 Problème de Cauchy

On se donne une condition initiale à l'instant $t = t_0$ notée $y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ y_0^2 \\ \dots \\ y_0^k \end{pmatrix}$.

On cherche une fonction $y : I =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^k$ dérivable telle que

- $a < t_0 < b$
 - $y(t_0) = y_0$
 - $y' = f(y)$
- soit encore

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, \dots, y_k) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \dots, y_k) \\ \dots \\ y_k' = f_k(y_1, y_2, \dots, y_k) \end{cases}$$

6.4.2 Existence et unicité

Dans ce qui suit, on fera l'hypothèse (H) suivante :
 $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ où f_i ($i = 1, 2, \dots, k$) est une fonction $C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$.

Théorème 6.4.1 *Théorème de Cauchy-Lipschitz*
 Sous la condition (H), pour tout y_0 donné dans \mathbb{R}^k , il existe

$$T_{\min}(y_0) < t_0 < T_{\max}(y_0),$$

tels que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution dans $]T_{\min}(y_0), T_{\max}(y_0)[$.

De plus, soit $T_{\max} = +\infty$
 soit $T_{\max} < +\infty$ et $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} y_i(t) = +\infty$.

Exemple 6.4.2 On considère le problème du pendule précédant

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) \end{cases}$$

auquel on ajoute des conditions initiales $x_1(0) = \alpha$ et $x_2(0) = \beta$. $f = (f_1, f_2)$ avec $f_1(x_1, x_2) = x_2$ et $f_2(x_1, x_2) = -\frac{g}{l} \sin(x_1)$. La fonction f est $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. D'après le théorème de C-L, il existe donc une unique solution.

6.4.3 Point stationnaire

Définition 6.4.3 On appelle solution stationnaire (ou solution constante ou équilibre) pour le système différentiel

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tout $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\bar{y}) = 0$

Exemple 6.4.3 On considère le problème du pendule

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) \end{cases}$$

Il admet une infinité de points stationnaires de la forme $(k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Stabilité au voisinage des points stationnaires

Si \bar{y} est un point d'équilibre, on peut trouver un système **linéaire** qui approche le système non linéaire autour du point d'équilibre \bar{y} . On dit que l'on linéarise le système $y' = f(y)$ au voisinage de \bar{y} :

$$z'(t) = J_f(\bar{y})z(t).$$

où J_f est la matrice jacobienne du système au point \bar{y} c'est-à-dire

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Théorème 6.4.2 Si toutes les valeurs propres de $J_f(\bar{y})$ sont de partie réelle strictement négative, \bar{y} est un point stationnaire localement asymptotiquement stable du système différentiel $y' = f(y)$.

Si l'une des valeurs propres de $J_f(\bar{y})$ est de partie réelle strictement positive, \bar{y} est un point stationnaire instable du système.

Si l'une des valeurs est à partie réelle nulle, on n'obtient pas de renseignements sur la stabilité du système original.

Remarque 6.4.2 Attention, les orbites d'un système non linéaire quelconque au voisinage d'un point d'équilibre ne ressemblent pas toujours à celles du système linéaire associé. En particulier, lorsque le système linéaire présente un centre et aussi parfois un noeud : c'est la stabilité qui est la même.

Régions invariantes

Définition 6.4.4 Une région de l'espace des phases Ω est dite positivement invariante par une équation différentielle si une solution partant de Ω reste dans Ω pour tout temps t positif.

Exemple 6.4.4 Le problème suivant modélise un système proie-prédateur (cf page suivante)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-v) \\ \frac{dv}{dt} = v(u-1) \end{cases}$$

où $u(t)$ représente l'effectif de la population de proies et $v(t)$ celui de la population de prédateurs au temps t . Il faut donc pour que ce modèle ait un sens que $u(t) \geq 0$ et $v(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$. Soient $f(x, y) = x(1-y)$ et $g(x, y) = y(1-x)$. Si $x = 0$ alors $f(x, y) = 0$, donc l'axe des ordonnées est invariant : "si on est sur la droite $x = 0$, on va y rester". De même si $y = 0$, l'axe des abscisses est invariant. Cela entraîne que tout le quadrant positif est invariant (car deux solutions ne peuvent pas se couper).

Isoclines nulles

Définition 6.4.5 On appelle isoclines du système différentiel

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

les courbes d'équation $f(x, y) = \text{Constante}$ ou $g(x, y) = \text{Constante}$.

Les états stationnaires d'un système se trouvent à l'intersection des isoclines nulles.

Exemple 6.4.5 Les isoclines du système proie-prédateur précédent sont

$$u' = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } v = 1$$

et

$$v' = 0 \Leftrightarrow v = 0 \text{ ou } u = 1$$

6.5 Etude de quelques modèles

6.5.1 Modèles en dynamique des populations

Exemple 6.5.1 **Modèle proie-prédateur** Volterra (1926) fut le premier à proposer un modèle simple de prédation d'une espèce sur une autre pour expliquer les niveaux d'oscillations d'un poisson pêché dans l'Adriatique.

Petit historique :

Pendant la première guerre mondiale, les activités de pêche avaient beaucoup diminué. Mais c'est la proportion de poissons du type requin, peu intéressants pour la consommation, qui avait considérablement augmenté par rapport aux poissons intéressants type sardines. Volterra modélisa l'interaction requins-sardines par le système suivant : Si $N(t)$ est la population de proie et $P(t)$ celle de prédateur au temps t alors le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(a - bP) \\ \frac{dP}{dt} = P(cN - d) \end{cases}$$

Les proies en l'absence de toute prédation se développent de façon exponentielle. Cela correspond au terme aN . Les effets de la prédation sont de réduire le taux de croissance des proies ; d'où le terme proportionnel aux populations de proies et de prédateurs $-bNP$.

En l'absence de toute proie pour se nourrir, le taux de mortalité du prédateur augmente de manière linéaire, ce qui dégrade de manière exponentielle la densité du prédateur ; cela correspond au terme $-dP$.

La contribution de la proie sur le taux de croissance du prédateur est cNP , lequel est proportionnel aux proies disponibles et à la taille de la population du prédateur.

Adimensionnement du système

En posant $u = \frac{c}{a}N$, $v = \frac{b}{a}P$, $\tau = \frac{a}{r}$ et $\alpha = \frac{d}{a}$, on obtient le système simplifié

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-v) \\ \frac{dv}{d\tau} = \alpha v(u-1) \end{cases}$$

Etude du système simplifié

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-v) \\ \frac{dv}{d\tau} = v(u-1) \end{cases}$$

Ce système admet deux points stationnaires $(0,0)$ et $(1,1)$. Le premier état correspond à l'extinction des deux populations, le second à la coexistence des deux espèces.

Etude de la stabilité : La matrice jacobienne du système est

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u-1 \end{pmatrix}$$

Etude locale en $(0,0)$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres étant réelles de signes différents, $(0,0)$ est asymptotiquement instable.

Etude locale en $(1,1)$

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont purement imaginaires, $(1,1)$ est instable. Le point $(1,1)$ est un centre, les orbites sont fermées au voisinage de $(1,1)$ (cf figure (6.6)).

Critiques de Lotka-Volterra : La croissance exponentielle des populations est irréaliste, on envisagea donc une première modification en prenant une croissance logistique des proies.

Le terme de prédation $-uv$ est aussi irréaliste, on le peut modifier en prenant $-\frac{\alpha uv}{1 + \beta u}$ (modèle de Holling)- (apparition d'un cycle limite).

Exemple 6.5.2 Modèle de compétition Le modèle classique de compétition décrit l'interaction de deux ou davantage d'espèces, lesquelles dépendent partiellement des mêmes ressources ou inhibent la croissance de chaque autre. Par exemple, deux espèces de poissons qui ne se mangent pas entre elles mais se nourrissent de la même chose.

Dans le cas de deux espèces, en l'absence de l'une, la seconde est contrôlée par une simple loi de Verhulst $x' = x(a_1 - a_2x)$. La présence de la seconde espèce fait diminuer la quantité de nourriture et ralentit donc la croissance de la première espèce. Le terme de compétition est quadratique, ce qui signifie que son effet est proportionnel au nombre de rencontres a_3xy . Le système obtenu est

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_1 - a_2x - a_3y) \\ \frac{dy}{dt} = y(b_1 - b_2y - b_3x) \end{cases}$$

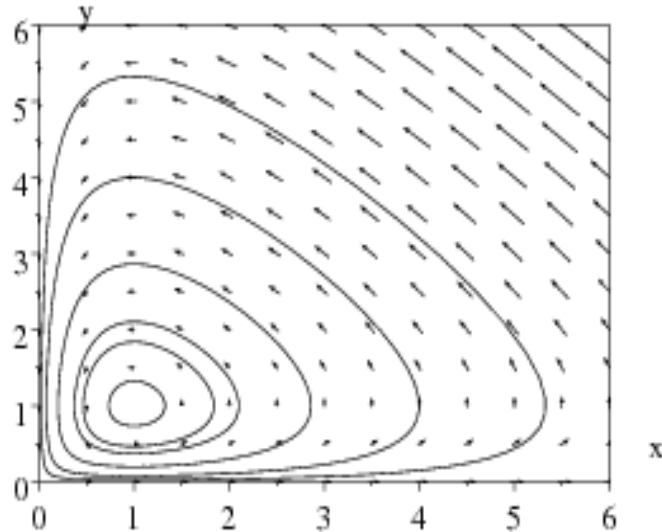


FIGURE 6.6 – Orbites du modèle proie-prédateur

Étudions un modèle simplifié :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1 - u - 3v) \\ \frac{dv}{dt} = v(1 - v - 2u) \end{cases}$$

Ce système admet quatre points stationnaires : extinction totale $(0,0)$, extinction partielle $(0,1)$, $(1,0)$ et coexistence $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$.

Étude de la stabilité : La matrice jacobienne du système est

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 2u - 3v & -3u \\ -2v & 1 - 2v - 2u \end{pmatrix}$$

Étude locale en $(0,0)$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres étant réelles strictement positives, $(0,0)$ est instable.

Étude locale en $(0,1)$

$$J(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $(-2, -1)$. Le point $(0,1)$ est localement asymptotiquement stable.

Étude locale en $(1,0)$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $(-1, -1)$. Le point $(1,0)$ est localement asymptotiquement stable. Étude locale en $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$

$$J(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres $(-1, \frac{2}{5})$ étant réelles de signes différents, le point $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ est instable.

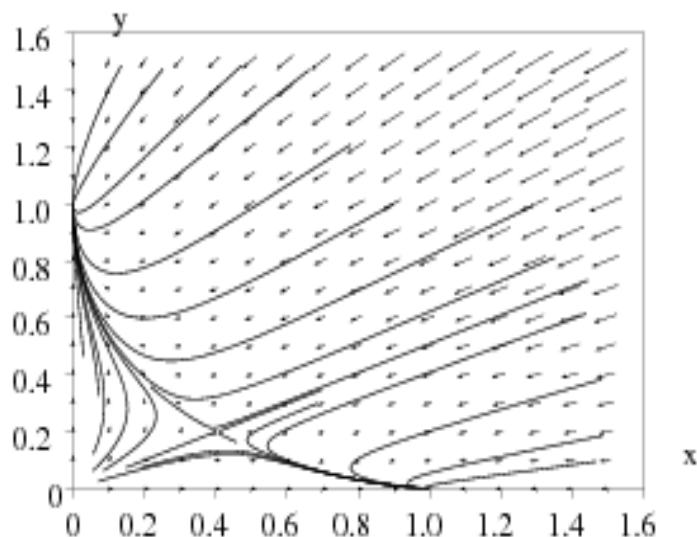
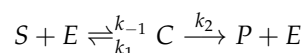


FIGURE 6.7 – Orbites du modèle de compétition

6.5.2 Modèles en cinétique enzymatique

Considérons à nouveau la réaction



Appelons e_0 la concentration totale d'enzyme (libre représentée par E ou liée dans le complexe SE). Appelons $s, e, c,$ et p les concentrations de S, E, C et P. D'après la loi d'action de masse, on peut modéliser cette réaction par le système suivant

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -k_1es + k_{-1}c & s(0) = s_0 & (1) \\ \frac{de}{dt} = -k_1es + k_{-1}c + k_2c & e(0) = e_0 & (2) \\ \frac{dc}{dt} = k_1es - k_{-1}c - k_2c & c(0) = c_0 & (3) \\ \frac{dp}{dt} = k_2c & p(0) = p_0 & (4) \end{cases}$$

On a vu précédemment que le système peut se réduire à

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -k_1(e_0 - c)s + k_{-1}c & s(0) = s_0 & (1) \\ \frac{dc}{dt} = k_1(e_0 - c)s - k_{-1}c - k_2c & c(0) = c_0 & (3) \end{cases}$$

Adimensionnement du système : justification de l'équation de MMH (Michaëlis, Menten et Henri)

Pour obtenir l'équation dite MMH, on fait l'hypothèse de quasi-stationnarité $\frac{dc}{dt} = 0$. On la justifie biologiquement en disant que la concentration d'enzyme étant beaucoup plus faible que la concentration du substrat, très rapidement les sites actifs de l'enzyme fonctionnent à leur capacité maximum. De $\frac{dc}{dt} = 0$, on tire que $c = \frac{k_1e_0s}{k_{-1} + k_2 + k_1s}$. De $\frac{ds}{dt} + \frac{dc}{dt} = k_1c$, on obtient $\frac{ds}{dt} = \frac{k_1k_2e_0s}{k_{-1} + k_2 + k_1s}$. En posant $V_{max} = k_2e_0$ et $K_{max} = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$, on trouve

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{V_{max}s}{K_{max} + s}$$

Ainsi, on transforme un système différentiel (deux équations différentielles) en une équation différentielle et une équation algébrique. Mais peut-on justifier mathématiquement cette approximation ?

Pour cela, nous allons adimensionner le système en changeant de variables. Posons $\tau = k_1 e_0 t$, $u = \frac{s}{s_0}$, $v = \frac{c}{e_0}$ (ceci signifie que $\tau = 1 \iff t = \frac{1}{k_1 e_0}$ la nouvelle unité de temps est $\frac{1}{k_1 e_0}$, l'unité de u est s_0 , et l'unité de v est e_0). Le système devient

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = -u(u + K - \lambda)v & u(0) = 1 \\ \frac{e_0}{s_0} \frac{dv}{d\tau} = u - (u + K)v & v(0) = c_0/e_0 \end{cases} \quad (1)$$

en posant $K = \frac{k_1 + k_2}{k_1 s_0}$ et $\lambda = \frac{k_2}{k_1 s_0}$. On peut négliger $\frac{e_0}{s_0} \frac{dv}{d\tau}$ si $\frac{e_0}{s_0} \ll 1$ pour des temps de l'ordre $\frac{1}{k_1 e_0}$. On obtient alors une équation algébrique et une équation différentielle qui conduisent à la relation de MMH. On voit sur le graphe que l'hypothèse de quasi-stationnarité ne peut être faite pour t proche de zéro. Pendant un court instant, le substrat se fixe petit à petit sur l'enzyme, ensuite le complexe reste à peu près constant jusqu'à ce que le substrat vienne à manquer (cf figure (6.8)).

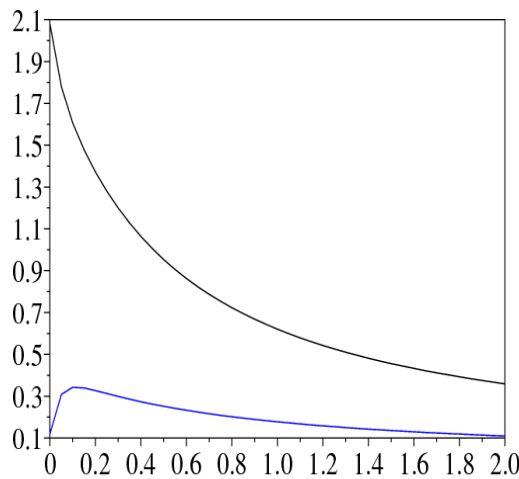


FIGURE 6.8 – Evolution du substrat et du complexe en fonction du temps (modèle de Michaëlis)

Etude du système

On peut tracer les isoclines nulles de ce système. La première isocline nulle : $\frac{ds}{dt} = 0 \iff c = \frac{e_0 c}{a + s}$ avec $a = \frac{k_{-1}}{k_1}$. La seconde isocline nulle : $\frac{dc}{dt} = 0 \iff c = \frac{e_0 c}{b + s}$ avec $a = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$. Ce système admet un unique point stationnaire $(0, 0)$. On peut tracer les isoclines et les vecteurs tangents. On peut aussi étudier la stabilité du point stationnaire. On peut tracer les fonctions s et c en fonction de t à l'aide d'un logiciel. On retrouve bien les différentes phases de la réaction (phase pré-stationnaire, stationnaire, ...).

6.5.3 Modèle de croissance en microbiologie dans un chemostat

Rappelons qu'un modèle mathématique classique de croissance des bactéries dans le chemostat est le suivant

$$\begin{cases} \frac{d(xV)}{dt} = \mu xV - F_{ex}x \\ \frac{d(sV)}{dt} = F_{in}s_{in} - F_{ex}s - \frac{\mu}{Y_{x/s}} xV \end{cases}$$

Il existe trois modes de fonctionnement de l'appareil : batch, fed-batch et continu. Ces différents fonctionnements conduisent à différents modèles qui seront étudiés en exercice.